Zur Geschichte der Zahlentheorie in den dreißiger Jahren

Die Entstehung der Riemannschen Vermutung für Kurven und ihres Beweises im elliptischen Fall

Roquette, Peter

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1996 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.153-191

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

PETER ROQUETTE, Heidelberg

Zur Geschichte der Zahlentheorie in den dreißiger Jahren

Die Entstehung der Riemannschen Vermutung für Kurven und ihres Beweises im elliptischen Fall

30.4.1997

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Dieser Artikel ist die Ausarbeitung eines Vortrages, den ich am 14. Juni 1996 vor der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehalten habe, während eines Symposiums aus Anlaß der Verleihung der Gauß-Medaille an GERHARD FREY.

Der Artikel ist historischer Natur. Er ist zu verstehen als Teil eines Projekts, das sich zum Ziel gesetzt hat, die Wirkung der Arbeiten von Helmut Hasse auf die Entwicklung der Mathematik unseres Jahrhnderts zu beschreiben. Und zwar handelt es sich bei diesem Artikel um einen vorläufigen, noch unvollständigen Bericht über denjenigen Teil der Hasseschen Arbeiten, der sich mit der arithmetisch-algebraischen Theorie der Funktionenkörper beschäftigt; in der heutigen Terminologie ist das die arithmetische Geometrie von Kurven.

Ich berichte über die Entstehung der Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper, oder – was damit gleichbedeutend ist – für Kurven, sowie über den ersten Beweis im elliptischen Fall. Dies geschah in den dreißiger Jahren dieses Jahrhunderts, und die Entwicklung wurde entscheidend bestimmt durch die Person von HELMUT HASSE, und zwar wesentlich auf Anregung von HAROLD DAVENPORT und bis zu einem gewissen Grade auch durch L.J.MORDELL.

Dieser Bericht ist *vorläufig* deshalb, weil wir noch nicht alle relevanten Quellen sichten und berücksichtigen konnten. *Unvollständig* ist er, weil eine Reihe von wichtigen, mit dem Thema zusammenhängenden Gesichtspunkten noch nicht mit aufgenommen wurden: z.Bsp. der Zusammenhang mit den Exponentialsummen und Charaktersummen; die weiteren Arbeiten von Schülern und Mitarbeitern Hasses, insbesondere von Deuring; sowie die Arbeiten Hasses zur Zetafunktion von Kurven über Zahlkörpern; u.a.m. Diese Lücken sollen bei späterer Gelegenheit ausgefüllt werden.

Die *arithmetische Geometrie* — auch *diophantische Geometrie* genannt — hat in diesem Jahrhundert eine stürmische Entwicklung erfahren und dominiert heute einen wesentlichen Teil der mathematischen Forschung. Es handelt sich nicht nur um eine mathematische Forschungsrichtung unter vielen anderen, sondern um mehr: um den Versuch, die Hauptgebiete der Mathematik: Arithmetik, Geometrie, Analysis, Algebra, unter einheitlichen Gesichtspunkten zu verstehen. Indem die Methoden und Ergebnisse verschiedener Gebiete zusammengeführt werden, ergeben sich Möglichkeiten zur Behandlung tiefliegender Probleme, die bislang als nicht angreifbar galten und manchmal noch nicht einmal adäquat formuliert werden konnten. Die Erfolge der arithmetischen Geometrie bei der Lösung klassischer Probleme sind unübersehbar.

Es ist daher wohl nicht uninteressant, auf die Anfänge zurückzugehen und zu sehen, wie die ersten Schritte getan wurden und zu welchen Ergebnissen sie führten. Eine zentrale Rolle spielte dabei der Beweis der Riemannschen Vermutung für elliptische Kurven durch Hasse. Ganz bewußt hatte Hasse bei den Arbeiten dazu nicht nur diesen Beweis im Auge, sondern er strebte eine methodische und inhaltliche Vereinigung zwischen Zahlentheorie und

Funktionentheorie an. Ich zitiere dazu seine eigenen Worte, anläßlich eines Übersichtsvortrages aus dem Jahre 1942:

> *Die Zahlentheorie verdankt der algebraischen Funktionentheorie sowohl eine nach Analogie gebildete eigenartige Methodik, die in den letzten Jahrzehnten zu einer höchst bemerkenswerten Bereicherung und Abrundung der arithmetischen Theorien geführt hat, als auch eine Anzahl von neuen, interessanten Ergebnissen, deren Beweis wesentlich in der algebraischen Funktionentheorie wurzelt.*

Zwar kommt dabei das Wort „Geometrie" nicht vor, sondern nur „Funktionentheorie", und zwar „algebraische Funktionentheorie", womit Hasse wohl die von ihm und F.K.Schmidt entwickelte Theorie der algebraischen Funktionenkörper meinte. Aus geometrischer Sicht handelt es sich dabei um den eindimensionalen Fall, also um den Fall von Kurven. Es ist bemerkenswert, daß Hasse diesen Übersichtsvortrag im Rom hielt, mit dem erklärten Ziel, die italienischen Geometer für diese „algebraische Funktionentheorie" zu interessieren, um damit schließlich auch den höherdimensionalen Fall mit einschließen zu können.

In der Tat: das sind die Anfänge der arithmetischen Geometrie.

Im Hinblick auf das allgemeine Interesse, das der arithmetischen Geometrie entgegengebracht wird, scheint es mir nicht unangebracht, schon heute diesen vorläufigen Zwischenbericht, wenn auch unvollständig, der Öffentlichkeit zu übergeben.

2 Die Personen

Ich beginne damit, die drei beteiligten Hauptpersonen kurz vorzustellen:

2.1 Louis Joel Mordell 1888–1972

Sein Arbeitsgebiet war Zahlentheorie. Er beschäftigte sich insbesondere mit diophantischen Gleichungen.

Mordell wurde in den USA geboren und kam mit 19 Jahren mit einem Stipendium nach Cambridge, England. Sein mathematisches Hauptinteresse wandte sich der Zahlentheorie zu, insbesondere der Theorie der diophantischen Gleichungen, darunter bereits damals die Gleichung $y^2 = x^3 + k$, die er im Laufe seines Lebens immer wieder von verschiedenen Aspekten aus eingehend studiert hat, sodaß sie heute als „Mordells Gleichung" benannt wird (obgleich sie schon viel früher behandelt worden war.) In Cambridge gab es damals jedoch nicht viel Interesse für solche Probleme, und Mordell hat sich stets als „self-taught" angesehen, hat also für sich keinen akademischen Lehrer anerkannt.

1920 wurde er als Lecturer an das Manchester College of Technology berufen, 1922 als Reader an die Universität von Manchester, 1923 als Professor.

1922 erschien seine Arbeit über die Endlichkeit einer Basis für die Punkte einer elliptischen Kurve, welche über dem rationalen Zahlkörper $\mathbb{Q}$ definiert ist. Dadurch wurde er mit einem Schlage weltbekannt. Sein Satz wurde kurze Zeit später von André Weil auf abelsche Varietäten über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper endlichen Grades verallgemeinert; seitdem spricht man von dem „Satz von Mordell-Weil". Auch die berühmt gewordene „Mordellsche Vermutung" findet sich in dieser Arbeit; sie war lange Zeit ungelöst bis sie 1983 von Faltings bewiesen wurde.

In seiner Biographie wird er charakterisiert als *„problem solver, not a system builder"*. In der Tat hatte er sich ein schier unerschöpfliches Wissen über die Lösung spezieller diophantischer Probleme angeeignet, und sein Buch ist eine Fundgrube für interessantes Beispielmaterial. Er hat niemals ein Hehl daraus gemacht, daß er von großen Theorien („high brow", wie er sie nennt) für sich allein genommen nicht viel hält. Vielleicht wird seine Einstellung zur Mathematik am besten durch seine eigenen Worte beschrieben:

> *It is well known what an important part has been played by problems, even of the simplest character, in furthering research, discovery and the advancement of mathematics... The solution of a problem frequently requires new ideas and new methods. The generalization it suggests, its consideration from a different point of view or its rephrasing may lead to a new problem of far greater significance than the original one which may turn out to be only a very special case of a general theorem. Sometimes it seems almost incredible what striking and far-reaching fundamental developments have arisen in directions which seem very remote indeed from the problem from which they arose. Problems are the life blood of mathematics.*

Während seiner Zeit in Manchester baute Mordell dort eine starke zahlentheoretische Schule auf; eine ganze Reihe von später bekannten Mathematikern kam nach Manchester, um bei ihm zu lernen. Einer von ihnen war der junge Harold Davenport.

Mordell blieb in Manchester bis 1945; dann erhielt er, der sich inzwischen ein hohes Ansehen erworben hatte, einen Ruf nach Cambridge als Nachfolger von Hardy. 1953 wurde Mordell emeritiert, blieb jedoch noch lange Zeit danach als Mathematiker sehr aktiv.

2.2 Harold Davenport 1907–1969

Sein Arbeitsgebiet war Zahlentheorie, insbesondere analytische Zahlentheorie.

1924–27 studierte er in Manchester bei Mordell. Dieser bezeichnete ihn später als einen der besten Schüler, den er je hatte. Danach ging er nach Cambridge, wo er 1929 bei Littlewood promovierte. Seine Ph.D. Thesis wird uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

1937 ging er als Assistent Lecturer nach Manchester zurück, wo er in dem Kreis, der sich um Mordell gebildet hatte, mitarbeitete. 1941 wurde er als Professor nach Bangor, North Wales berufen und 1945 an die University of London. Schließlich, 1958, kam er nach Cambridge.

Davenport wird beschrieben als ein hervorragender und engagierter akademischer Lehrer; er hatte viele Schüler, die später als Mathematiker bekannt wurden. Zwei seiner Schüler erhielten die Fields Medaille; diese Auszeichnung wird oft angesehen als Äquivalent eines Nobel-Preises für Mathematik (den es nicht gibt).

In dem Dictionary of Scientific Biography wird Davenport beschrieben als:

> *...natural academic leader...*
> *...most influential mathematician of his time...*

Hier ist ein Zitat über Davenport aus einem Nachruf:

> *Perhaps one can summarize Davenport's work by saying that it was characterized by originality, beauty and power, qualities which are not often found in the same person...He had all the mathematical virtues one would like to have. Whatever he did, he did exceedingly well, probably because he had a very logical mind and so made straight for his goal.*

2.3 Helmut Hasse 1898–1979

Sein Arbeitsgebiet war Zahlentheorie, insbesondere algebraische Zahlentheorie.

Hasse begann sein Studium im Jahre 1918 in Göttingen. Er hörte Vorlesungen u.a. bei Erich Hecke über komplexe Multiplikation. Als Hecke 1920 Göttingen verließ, beschloß Hasse, nach Marburg zu wechseln, weil ihn die p-adischen Zahlen zu interessieren begannen. Deren Entdecker, Kurt Hensel, lehrte in Marburg. In Hasses Dissertation und weiter in seiner Habilitationsschrift (1921/22) formulierte er im Rahmen der quadratischen Formen das fundamentale „Lokal-Global-Prinzip", das sich heute für einen großen Teil der Zahlentheorie als eine Richtschnur für die Forschung durchgesetzt hat.

1922 ging Hasse als Privatdozent nach Kiel; 1925 Professor in Halle, 1930 Nachfolger von Hensel in Marburg, 1934 Berufung nach Göttingen. In der Nachkriegszeit ging Hasse zunächst nach Berlin und nahm 1950 einen Ruf an die Universität Hamburg an.

Die Hasseschen Arbeiten umfassen neben dem Lokal-Global-Prinzip u.a. die folgenden Themengebiete: Explizite Reziprozitätsgesetze – Normenrestsymbol – Aufbau der Klassenkörpertheorie – Arithmetik der Algebren, lokal und global – Struktur der Brauergruppe – Komplexe Multiplikation – Abelsche Zahlkörper – Einbettungsprobleme.

Ab 1930 kam die Theorie der algebraischen Funktionenkörper hinzu; von dieser Periode handelt der vorliegende Artikel.

Hasse galt als ein Vertreter der „abstrakten" oder „algebraischen" Sichtweise; vielleicht sollte man dafür heute lieber „strukturell" sagen. Er stand damit voll hinter den Bestrebungen von Emmy Noether zur Algebraisierung weiter Teile der Mathematik, und er hat sich immer wieder auf den Noetherschen Ideenkreis bezogen. Andererseits hat er genauso prononciert auch auf die Notwendigkeit der „*expliziten Beherrschung*" des mathematischen Gegenstandes hingewiesen, bis hin zur Durchführung numerischer Beispiele und Experimente.

Man kann sagen, daß Hasse einer derjenigen war, der das Gesicht der Zahlentheorie, so wie wir sie heute sehen, entscheidend geprägt hat. In einer Biographie heißt es über ihn:

> *One of the most important mathematicians of the 20th century... his contributions permeate modern number theory... his books confirm Hasse's reputation as a writer who could be counted on to present the most difficult subjects in great clarity... in teaching, the long list of his students and their description of his inspiring lectures give ample testimony to his excellence.*

3 Der Anfang

Am 25.11.1930 schrieb Hasse, der sich gerade in Marburg eingerichtet hatte, einen Brief an Mordell. Offenbar hatten die beiden bereits vorher wissenschaftlichen Kontakt gehabt; ich habe aber noch nicht feststellen können, wann sie sich zum ersten Mal getroffen hatten. Am Schluß des Briefes heißt es:

> *...It would be better, and easier for me too, to write this letter in German. But I am happy to have got an opportunity for practice my knowledge in English. You may be interested to hear that I have continued my zealous studies in your language this summer...*

Und Hasse fährt fort, offensichtlich in etwas holperigem Englisch:

> *In order to have further occasion for applying and enriching my knowledges I would much like to get a young English fellow at home. It would be very kind of you, if you could send me one of your students during next summer term (April-July). We would invite that student to dwell and eat with us. He would be obliged to speak English with us at any time we are together (at breakfast, dinner, tea, lunch etc.)...From my point of view it would be best, if he were student of pure mathematics out of an advanced course of yours... I would much like to hear from you, whether you know a clever and handsome fellow for this purpose.*

Bereits zwei Tage später, am 27.11.30, ist der Antwortbrief von Mordell aus Manchester an Hasse datiert. Darin heißt es:

> *I can suggest the very person you want to go to Marburg. Mr. Harold Davenport, Trinity College, Cambridge. He was formerly one of our students, the best we have had for many years, and he has been in Cambridge for several years. He is doing research, and lately he has proved some such result as* $\sum_{n=0}^{p-1}\left(\frac{n^4+an^2+bn+c}{p}\right) = O(p^{\frac{3}{4}})$ *where the left hand () is the symbol of quadratic reciprocity. I think Hopf in the Zeitschrift a year or two ago showed right hand side* $< \frac{p}{6}$ *!! He is interested in certain aspects of number theory and I believe he would be free to go. I have written to him and asked him to write direct to you...*

Und am 7.12.1930 schrieb Davenport selbst, damals in Trinity College, an Hasse:

> *Dear Prof. Hasse,*
>
> *Prof. Mordell has told me of your letter to him, in which you say that you would like to know of an advanced English student of pure mathematics, whom you could invite to Marburg next summer term. May I offer you my services?*
>
> *I used to be a student of Mordell's at Manchester, but for the last three years I have been studying here. I am particularly interested in the analytical theory of numbers – Gitterpunktprobleme,*

ζ-function, etc. Are you interested in these subjects, or is there anyone else at Marburg who is? So far I have only written two short papers, which will appear soon in the Journal of the London Mathematical Society; one on the distribution of quadratic residues (mod p), *the other on Dirichlet's L-functions.*

I am 23 years old, and not at all 'handsome' (as you required in your letter). Also I do not swim or drink beer – and I understand that these are the principal recreations in Germany...

Offensichtlich hat sich Hasse durch die von Davenport zuletzt genannten Defizite nicht beeindrucken lassen. Davenport hielt sich tatsächlich im Sommer 1931 im Hause Hasse in Marburg auf. Es begann eine langjährige Freundschaft zwischen der Familie Hasse und dem jüngeren Davenport. Sicherlich wirkte sich dies auf die Englischkenntnisse von Hasse aus, gleichzeitig aber weckte Davenport in ihm ein besonderes Interesse, das Hasse sein Leben lang bewahrte, für die englische Geschichte, für englische Literatur und überhaupt für alles charakteristisch Englische. Andererseits profitierte auch Davenport von diesem Kontakt; er sprach später fließend deutsch, was er offenbar durch den Deutsch-Unterricht von Frau „Clärle“ Hasse gelernt hatte.

Die Freundschaft zwischen Hasse und Davenport hatte darüberhinaus einen bemerkenswerten Einfluß auf das Schaffen Hasses in den nächsten Jahren – womit eine eindrucksvolle Entwicklung in der Mathematik eingeleitet wurde, die bis heute nachwirkt. Denn Davenport gelang es, Hasses Interesse auf das von ihm behandelte Problem über diophantische Kongruenzen zu lenken, bei dem er (Davenport) zwar imponierende Fortschritte erzielt, es aber nicht vermocht hatte, bis zu dem erwarteten endgültigen Resultat vorzudringen.

Darüber will ich in diesem Artikel berichten.

4 Das Problem

Das in Rede stehende zahlentheoretische Problem bezieht sich auf *diophantische Kongruenzen*.

Eine diophantische Kongruenz z.Bsp. in zwei Variablen wird gegeben durch ein Polymnom $f(x, y)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, sowie durch eine Primzahl p, den „Modul“ der Kongruenz. Gesucht werden die ganzzahligen Lösungen $a, b \in \mathbb{Z}$ der Kongruenz

$$f(x, y) \equiv 0 \mod p\,, \tag{1}$$

d.h. also, die Zahl $f(a, b)$ soll durch p teilbar sein. Allgemein nennt man zwei ganze Zahlen u und v *kongruent modulo* p, wenn sie durch p geteilt denselben Rest ergeben; man schreibt dann $u \equiv v \mod p$. [1]

Die Theorie der diophantischen Kongruenzen und Gleichungen bildet einen wichtigen Teil der Zahlentheorie dieses und des vergangenen Jahrhunderts.

Es entsteht die Frage, ob es zu gegebenem Polynom $f(x,y)$ überhaupt Lösungen der diophantischen Kongruenz (1) gibt, und dann die Frage nach der Anzahl N dieser Lösungen. Gemäß der Problemstellung wird dabei zwischen Lösungen, welche modulo p kongruent sind, nicht unterschieden.

Im allgemeinen wird es nicht möglich sein, für die gesuchte Lösungsanzahl N eine einfache Formel zu finden. Dessenungeachtet interessiert man sich für das *Wachstum* der Zahl N für $p \to \infty$, bei gegebenem Polynom $f(x,y)$. Wie schnell (wenn überhaupt) wächst N bei wachsendem p?

Wir setzen im folgenden stets voraus, daß $f(x,y)$ *absolut irreduzibel* ist, also nicht in ein Produkt von Polynomen kleineren Grades zerfällt – und zwar auch dann nicht, wenn man als Koeffizienten der Polynomfaktoren nicht nur ganze Zahlen, sondern auch beliebige reelle oder komplexe Zahlen zuläßt.

Diese Voraussetzung ist insbesondere dann erfüllt, wenn $f(x,y)$ von der Form $y^2 - \varphi(x)$ ist, wobei $\varphi(x)$ ein Polynom einer Variablen ohne mehrfache Nullstellen ist. Für Polynome dieser Art handelt es sich also um diophantische Kongruenzen der Form

$$y^2 \equiv \varphi(x) \mod p. \tag{2}$$

In dem Fall, daß $\varphi(x)$ ein Polynom vom Grad ≤ 2 ist, waren die Lösungsanzahlen seit längerer Zeit bekannt. Davenport hatte nun in seiner These Polynome vom Grad 3 und 4 behandelt. Sein Resultat war, daß die Lösungsanzahl N für $p \to \infty$ das folgende Verhalten zeigt:

$$N = p + \mathcal{O}(p^{3/4}) \qquad \text{für} \quad p \to \infty. \tag{3}$$

Dies besagt folgendes: Die Zahl N wächst „ungefähr" so schnell wie p selbst; setzen wir $N = p + R$ so besitzt das Fehlerglied R die Abschätzung $|R| \leq C \cdot p^{3/4}$, wobei C eine nicht näher angegebene Konstante bedeutet, die also nicht von p abhängt. Die letztere Abschätzung wird in der Mathematik auch in der Form $R = \mathcal{O}(p^{3/4})$ geschrieben, nämlich dann, wenn es auf die genaue Bestimmung der Konstante C nicht ankommt. (Das ist die sog. $\mathcal{O}$-Notation, die von Landau eingeführt wurde.)

Wichtig an der Aussage (3) ist es, daß die Primzahl p, die im Hauptglied mit dem Exponenten 1 vorkommt, im Fehlerglied mit einem kleineren

[1]Untersucht man statt der Kongruenz (1) die Gleichung $f(x,y) = 0$ und sucht nach den ganzzahligen Lösungen, so spricht man von einer *diophantischen Gleichung*. Das Beiwort „diophantisch" deutet darauf hin, daß nur *ganzzahlige* Lösungen gesucht werden. Verzichtet man auf diese Ganzzahligkeit, so bilden die Lösungen eine *algebraische Kurve*. Die Lösung einer diophantischen Gleichung in zwei Variablen bedeutet also die Bestimmung ganzzahliger Punkte auf einer algebraischen Kurve.

Exponenten erscheint, nämlich $3/4$. Demnach überwiegt das Hauptglied bei weitem das Fehlerglied, wenn p groß ist. Insbesondere sehen wir, daß $N > 0$ für große p, d.h. für große p gibt es stets mindestens eine Lösung der diophantischen Kongruenz (2).

Man kann annehmen, daß Davenport über diese seine Resultate berichtete, als er bei seinem ersten Besuch in Marburg von Hasse über seine mathematischen Arbeiten befragt wurde. [2] Schließlich handelte es sich um die Erstlingsarbeiten von Davenport, und er konnte mit Recht stolz auf seine Ergebnisse sein, die andere Mathematiker, darunter auch Mordell, lange Zeit gesucht hatten. Er hatte dabei einen besonderen Trick benutzt, der später von seinem Biographen als „genial" bezeichnet wurde, nämlich die sog. „Momentenmethode".

Wir können aber gleichermaßen annehmen, daß Hasse von dieser Art, Mathematik zu betreiben, nicht sehr angetan war. Das bedeutet nicht etwa, daß er die Leistung von Davenport nicht anerkennen wollte. Im Gegenteil, aus den Briefen Hasses an Davenport ist zu entnehmen, daß er einen hohen Respekt vor der mathematischen Leistung Davenports besaß, und auch von dessen Urteilsfähigkeit; es ist bemerkenswert, daß Hasse dem neun Jahre jüngeren Kollegen regelmäßig über seine eigenen Fortschritte in der Forschung berichtete und dessen Meinung dazu einholte. Womit Hasse offenbar nicht zufrieden war, das war der *Ansatz* von Davenport zur Lösung des Problems, und die *mathematische Denkweise*, die sich darin widerspiegelt.

Davenport kam aus der Schule von Littlewood. Er bezeichnete sein Interessengebiet als „analytische Zahlentheorie"; das ist derjenige Teil der Zahlentheorie, bei dem die Methoden und Ergebnisse der reellen oder komplexen Analysis zum Einsatz gebracht werden. Zwar gibt es in der Davenportschen These keine direkte Anwendung von tiefgehenden analytischen Resultaten, aber die ganze Betrachtungsweise entstammt dem Arsenal des analytischen Zahlentheoretikers, so z.Bsp. die Manipulation und Abschätzung von Rechenausdrücken. Im Gegensatz dazu sprach sich Hasse dafür aus, die Methoden der ***strukturellen Algebra*** in der Zahlentheorie einzusetzen. Hasse vertrat damit, ganz im Sinne von Emmy Noether, die strukturelle Auffassung der Mathematik. Heute hat sich diese Auffassung weitgehend etabliert, damals galt sie als neu und „modern", wie es ja auch im Titel des damals erschienenen Lehrbuches „*Moderne Algebra*" von van der Waerden zum Ausdruck kam.

Die meisten algebraischen Formeln der Zahlentheorie, so hat es uns Hasse gelehrt, finden ihre Interpretation im Rahmen der einschlägigen Strukturen. Und das Hassesche Gesamtwerk ist ein großartiges Zeugnis von dem Erfolg

[2] Genau genommen behandelte Davenport nicht direkt das Problem der diophantischen Kongruenz (2), sondern ein anderes Problem, über die Verteilung von quadratischen Resten modulo p. Für den Fachmann (einschl. Davenport) war es jedoch klar, daß jenes andere Problem auf das hier vorgestellte Problem über diophantische Kongruenzen zurückläuft.

dieser Auffassung.

Solche grundlegenden Unterschiede in der mathematischen Sichtweise mögen zutage getreten sein in der Diskussion zwischen Hasse und Davenport, als es über die Weiterarbeit an dem Problem der diophantischen Kongruenzen ging. So großartig nämlich das Davenportsche Ergebnis auch zu bewerten war, es war doch nur als ein Teilerfolg anzusehen angesichts der noch ausstehenden vollständigen Lösung des Problems der diophantischen Kongruenzen. Und zwar:

Erstens war es notwendig, die Frage nach der Güte des Fehlergliedes in seiner Größenordnung $p^{3/4}$ zu klären. Man vermutete bereits damals aus heuristischen Gründen, daß die Fehlerglied-Abschätzung noch wesentlich verbessert werden könne, nämlich von $p^{3/4}$ auf $p^{1/2}$ (der Exponent $1/2$ ist das beste was allgemein erwartet werden kann). Die optimale Fehlerglied-Abschätzung ist von großer Bedeutung in einer Reihe von Anwendungen, und das Ergebnis von Davenport konnte lediglich als ein Schritt in diese Richtung gewertet werden, nicht als das Endresultat.

Zweitens sollte dies alles nicht nur für die von Davenport behandelten Polynome gelten, sondern für ein *beliebiges* Polynom $f(x,y)$ (das nach unserer Generalvoraussetzung als absolut irreduzibel vorauszusetzen ist). Der von Davenport behandelte Fall einer Kongruenz der Form (2) mit einem Polynom $\varphi(x)$ vom Grad 3 oder 4 erscheint in diesem Zusammenhang als der „elliptische" Spezialfall; so genannt, weil die durch $y^2 = \varphi(x)$ gegebene Kurve dann eine elliptische Kurve ist.

Es gab bereits eine Reihe von Vorarbeiten in der angegebenen Richtung, meist von Mordell. In einem Brief von Mordell an Hasse aus dem Jahre 1931 findet sich die folgende Aufstellung der damals bekannten Resultate. Es handelt sich um diophantische Kongruenzen der Form

$$y^k \equiv \varphi_n(x) \mod p \tag{4}$$

wobei n den Grad des Polynoms $\varphi(x)$ bedeutet. Die von Mordell an Hasse gesandte Liste der bekannten Resultate sah wie folgt aus; dabei bedeutet θ jeweils den erreichten Exponenten von p in der Abschätzung des Fehlergliedes:

$$N = p + \mathcal{O}(p^\theta)\,. \tag{5}$$

k:	2	2	4	≥ 2	3
n:	4	6	4	3	3
θ:	2/3	7/8	5/6	3/4	1/2

Hier steht in der vorletzten Spalte das Davenportsche Ergebnis für $n = 3$. Und zwar nicht nur für $k = 2$, wie oben besprochen, sondern für beliebiges

$k \geq 2$; das hatte Davenport inzwischen in einer weiteren Arbeit mit wesentlich denselben Methoden geleistet, und übrigens auch Mordell selbst, nachdem er die Davenportsche Thesis gelesen hatte. Das Davenportsche Ergebnis für $k = 2$, $n = 4$ ist hier nicht mehr aufgelistet, da es durch das Mordellsche Ergebnis in der ersten Spalte mit dem Exponenten 2/3 (statt des Davenportschen 3/4) bereits überholt war. Bemerkenswert ist auch, daß in der letzten Spalte schon der bestmögliche Exponent 1/2 auftaucht; das geht ebenfalls auf Mordell zurück.

Wir können uns vorstellen, daß Hasse den Standpunkt vertreten hat, diese Resultate seien nur zufälliger Art, durch gewisse, wenn auch geniale, Rechentricks zustande gekommen. Dadurch sei auch erklärlich, daß der erreichte Exponent θ im Fehlerglied in den verschiedenen Fällen so unterschiedlich herausgekommen war, während man doch stets den bestmöglichen Exponenten 1/2 erwartete. Bei der Verfolgung des allgemeinen Problems mit der richtigen Fehlerglied-Abschätzung $p^{1/2}$ müsse man strukturtheoretische Methoden einbringen und in den Vordergrund stellen.

Daraufhin mag Davenport zum Ausdruck gebracht haben, daß er von jenen Methoden als solchen nicht viel halte, schließlich seien nicht die Methoden, sondern der Erfolg entscheidend, und die bewährten Methoden der analytischen Zahlentheorie seien doch wohl stärker. Und als Hasse ihm immer noch widersprach, forderte er ihn heraus, doch mit seinen angeblich so starken algebraisch-strukturellen Methoden das in Rede stehende Problem zu lösen.

Diese Herausforderung Davenports hat Hasse angenommen. Er fing an, sich mit diesem Problemkreis eingehender zu befassen, und zwar in der Tat sofort unter strukturellen Gesichtspunkten, und sofort auf den bestmöglichen Restgliedexponenten 1/2 zielend.

Die obige hypothetische Diskussion ist nicht aus der Luft gegriffen. Hasse selbst pflegte uns die Situation in ähnlicher Weise zu schildern, wenn er – befragt – über seine ersten Beweisschritte in Richtung der Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper berichtete. Und auch die Korrespondenz zwischen Hasse und Davenport zeigt ein ähnliches Bild.

Das Verhältnis zwischen Hasse und Davenport war nicht etwa durch Rivalität geprägt, wobei der eine dem anderen den wissenschaftlichen Ruhm ablaufen wollte. Zwischen ihnen entwickelte sich, wie aus den Berichten und auch aus der Korrespondenz zu entnemen ist, eine echte und herzliche Freundschaft – bis in die späten dreißiger Jahre hinein.

Mathematisch gesehen herrschte eine freundschaftliche und anregende Konkurrenz, wobei jeder auf seiner Eigenart bestand und den anderen in freundschaftlicher Weise herausforderte.

Zwar kam es einmal zu einer gemeinsamen Publikation von Hasse mit Davenport (ich werde später darauf zurückkommen), jedoch muß gesagt werden, daß sich die Freundschaft zwischen Hasse und Davenport nicht deshalb so fruchtbar auswirkte, weil beide mathematisch gut kooperieren konnten, sondern weil sie es eben nicht konnten, und sich jeder durch den anderen herausgefordert fühlte.

In späteren Jahren hat sich Davenport dahingehend geäußert, daß er zwar durch die Begegnung mit Hasse viel gelernt habe, daß er aber noch viel mehr hätte lernen können, wenn er damals nicht so „pig-headed" gewesen wäre, was vielleicht am besten mit „sturköpfig" übersetzt werden kann. Wie mir scheint, war es aber gerade diese seine „Sturköpfigkeit", verbunden mit der Hasses, welche sich so fruchtbar ausgewirkt hat. Und der Ausdruck „sturköpfig" ist wohl auch nicht angemessen. Es handelt sich vielmehr um das Beharren auf der persönlichen Eigenart in der Auffassung von der Relevanz mathematischer Methoden und Konstruktionen.

Ich fasse zusammen:

- *Die Anregung zur Beschäftigung mit diophantischen Kongruenzen erhielt Hasse durch Davenport.*
- *Die Freundschaft zwischen Hasse und Davenport wirkte sich nicht deshalb so fruchtbar aus, weil beide gut kooperieren konnten, sondern weil beide verschiedene Ansichten über die Art und Weise, Mathematik zu treiben, hatten und damit jeder den anderen zu besonderer Leistung herausforderte.*
- *Hasse vertrat den Standpunkt, daß zur Untersuchung der diophantischen Kongruenzen die (damals modernen) algebraisch-strukturellen Begriffe und Methoden herangezogen werden sollten. Damit könne als Ziel von vorneherein die Fehlerglied-Abschätzung mit dem bestmöglichen Exponenten* $1/2$ *anvisiert werden. Man solle sich nicht mit schwächeren Abschätzungen zufrieden geben.*

5 Hasses Beiträge

Ich beginne nun damit, die Beiträge Hasses zum genannten Problem über diophantische Kongruenzen im einzelnen genauer zu beschreiben. Sie lassen sich grob unter die folgenden Punkte subsumieren:

(i) Verallgemeinerung des Problems, indem statt des Primkörpers $\mathbb{Z}$ (modulo p) auch ein beliebiger endlicher Körper K der Charakteristik p zugelassen wird.

(ii) Feststellung, daß dieses Problem, bezogen auf den bestmöglichen Fehlerglied-Exponenten $1/2$, gleichbedeutend ist mit der sog. „Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper".

(iii) Beweis dieser „Riemannschen Vermutung" für elliptische Funktionenkörper; dies schließt insbesondere den von Davenport behandelten Fall ein (für $k = 2, 3, n = 3$), aber jetzt mit dem bestmöglichen Fehlerglied-Exponenten $1/2$.

(iv) Entwicklung eines Projekts, das den Beweis der Riemannschen Vermutung für beliebige Funktionenkörper zum Ziele hat. Durchführung in Spezialfällen.

Die Punkte **(ii)** – **(iv)** werden in den nächsten Abschnitten besprochen; hier erläutern wir zunächst Punkt **(i)**:

Seit Gauß ist bekannt, daß mit Kongruenzen modulo einer Primzahl p algebraisch genauso gerechnet werden kann wie mit Gleichungen: die vier Rechenoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und auch der Division stehen wie üblich zur Verfügung. Die moderne, axiomatisch fundierte Algebra hat für diesen Sachverhalt den Begriff des *Körpers* geprägt. Also: Durch die Kongruenzrechnung mit ganzen Zahlen modulo p wird ein Körper geschaffen; dieser heißt der *Primkörper* zu p und wird mit $\mathbb{Z}/p$ bezeichnet. Wenn man die Koeffizienten des gegebenen Polynoms $f(x,y)$ modulo p reduziert, also als Elemente dieses Körpers auffaßt, so erscheint das Problem der diophantischen Kongruenz modulo p nunmehr als Problem der Lösung der Gleichung $f(x,y) = 0$ im Körper $\mathbb{Z}/p$. Und zwar interessiert die Anzahl N der Lösungen a, b in $\mathbb{Z}/p$. [3]

Nun kommt die Verallgemeinerung: Statt $\mathbb{Z}/p$ wird jetzt ein beliebiger endlicher Körper K zugrundegelegt. Man kennt die algebraische Struktur dieser Körper vollständig. Bedeutet q die Anzahl der Elemente von K, so ist $q = p^r$ Potenz einer Primzahl p, der sog. *Charakteristik* des Körpers, und K ist durch q eindeutig bestimmt. K enthält den Primkörper $\mathbb{Z}/p$.

Und weiter: Man betrachte jetzt ein beliebiges Polynom $f(x,y)$ zweier Variablen mit Koeffizienten aus dem gegebenen Körper K; es wird wiederum vorausgesetzt, daß $f(x,y)$ absolut irreduzibel ist. Gefragt ist nach der Anzahl $N = N(f)$ der Lösungen a, b in K der Gleichung

$$f(x,y) = 0. \tag{6}$$

Und zwar interessiert das Verhalten von N für $q \to \infty$. Das Problem besteht jetzt darin, nachzuweisen, daß

$$N = q + O(q^{1/2}). \tag{7}$$

[3] Weil $f(x,y)$ als absolut irreduzibel vorausgesetzt war, so ist auch das reduzierte Polynom $f(x,y)$ modulo p absolut irreduzibel über $\mathbb{Z}/p$ – jedenfalls für alle hinreichend großen Primzahlen p, und da es hier nur auf den Grenzübergang $p \to \infty$ ankommt, so können endlich viele Ausnahmen außer acht bleiben.

Auf den ersten Blick scheint es, als ob diese Verallgemeinerung des Problems nichts grundsätzlich Neues bringt. Vom „naiven“ Standpunkt würde es sich anbieten, zunächst einmal den einfacheren und wesentlichen Fall des Primkörpers $\mathbb{Z}/p$ zu behandeln; erst wenn dieser Fall erledigt ist, sollte man sich dann der Verallgemeinerung zuwenden, vorausgesetzt, es besteht Interesse dafür.

Dieser „naive“ Standpunkt war aber nicht der von Hasse: er hatte erkannt, daß sich durch die angegebene Verallgemeinerung ein neuer Weg zur Behandlung des Problems öffnet.

In der Mathematik kommt es nicht selten vor, daß man einen Zugang zur Lösung eines Problems dadurch findet, daß man die Problemstellung gehörig verallgemeinert. Durch eine solche Verallgemeinerung kann der Blick frei werden für die wesentlichen Komponenten des Problems, losgelöst von den evtl. unübersichtlichen Einzelheiten der gegebenen speziellen Situation, für die man sich eigentlich interessiert. Auch kann durch eine solche Verallgemeinerung erreicht werden, daß das Problem in einen größeren Zusammenhang gestellt wird, wodurch die Anwendung von Methoden nahegelegt wird, die sonst vielleicht übersehen worden wären.

Das ist nun auch im vorliegenden Falle so. Neu bei der angegebenen Verallgemeinerung ist es, daß der Grenzübergang $q \to \infty$ jetzt auch anders durchgeführt werden kann: Während der ursprüngliche Grenzübergang $p \to \infty$ besagt, daß immer größer und größer werdende Primkörper $\mathbb{Z}/p$ zu betrachten sind, so kann für $q = p^r$ der Grenzübergang $q \to \infty$ auch so durchgeführt werden, daß bei fester Primzahlcharakteristik p, größer und größer werdende endliche Körper derselben Charakteristik p betrachtet werden.

Genauer: Nehmen wir an, die Koeffizienten des gegebenen Polynoms $f(x, y)$ gehören einem endlichen Körper K_0 an. Man betrachte nun alle endlichen Erweiterungskörper K von K_0; jeweils sei q die Anzahl der Elemente von K. Es bedeute $N = N(q)$ die Anzahl der Lösungen a, b von (6) in K. Wenn dann K alle endlichen Erweiterungskörper von K_0 durchläuft, so läuft $q \to \infty$; dies ist dann ebenfalls ein Grenzübergang im Sinne von (7).

Bei diesem Standpunkt aber, nämlich eine Gleichung der Form (6) über einem gegebenen Grundkörper zu studieren, wobei gleichzeitig auch alle Erweiterungskörper dieses Grundkörpers in Betracht gezogen werden, – bei diesem Standpunkt öffnen sich die Methoden der *algebraischen Geometrie*.

Allerdings: zu der damaligen Zeit war die algebraische Geometrie über beliebigen Grundkörpern noch keineswegs so ausgebaut, wie wir sie heute vorfinden. Zwar wurde schon damals die Entwicklung der algebraischen Geometrie im Rahmen der abstrakten Algebra allgemein als ein dringendes Problem erachtet; einige Ansätze dazu gab es bereits z.Bsp. von Emmy Noether und van der Waerden. Jedoch war man noch weit von einer ausgearbeiteten Theorie entfernt, auf die sich Hasse hätte stützen können.

In der Tat: Hasse mußte sich zu seinem Beweis die relevanten Sätze und Methoden der algebraischen Kurventheorie erst selbst erarbeiten.

Es bedurfte einer großen intuitiven Eingebung, sich in dieser Situation, in der die algebraische Geometrie noch nicht in der erforderlichen Allgemeinheit zur Verfügung stand, auf diesen Ansatz einzulassen. Wie aus dem Briefwechsel von Hasse mit Davenport eindeutig zu entnehmen ist, vertraute Hasse fest auf die Kraft der „algebraischen Methode".

Die Erfolge von Hasse und seinem Kreis bei der Verfolgung dieser „algebraischen Methode" lieferten andererseits einen kräftigen Impuls für die allgemeine Weiterentwicklung der algebraischen Geometrie über beliebigen Körpern.

Allerdings lehnen sich die Hasseschen Begriffsbildungen und Beweise nicht direkt an die algebraische Geometrie an; sie entstammen vielmehr der körpertheoretischen Denkweise und dem Vokabular aus der algebraischen Zahlentheorie, wo algebraische Zahlkörper untersucht werden. Demgemäß werden bei Hasse nicht Kurven betrachtet, sondern „Funktionenkörper". In der Hasseschen Terminologie bedeutet „Funktionenkörper" immer „Funktionenkörper einer Variablen über einem gegebenen Grundkörper K". Solch ein Funktionenkörper $F|K$ wird erzeugt in der Form

$$F = K(x,y) \qquad \text{mit} \quad f(x,y) = 0 \tag{8}$$

wobei $f(x,y)$ ein absolut irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus K ist. Umgekehrt führt jedes absolut irreduzible Polynom mit Koeffizienten aus K vermöge (8) zu einem Funktionenkörper $F|K$. In diesem Sinne sehen wir es heute als gleichbedeutend an, ob man von Kurven oder von Funktionenkörpern spricht.

Für Hasse aber war das keineswegs gleichgültig. Er bevorzugte ganz klar die Sprache der Funktionenkörper und stellt sich damit auf den „birational invarianten" Standpunkt. Dadurch gewinnt seine Theorie an Klarheit, Prägnanz und Schönheit.

Zusammenfassung:

- *Hasse interpretiert das Problem der diophantischen Kongruenzen als ein Problem von rationalen Punkten einer Kurve über dem Primkörper der Charakteristik p.*

- *Er verallgemeinert die Aufgabe, indem statt des Primkörpers ein beliebiger endlicher Körper K als Grundkörper zugelassen wird. Durch diese Verallgemeinerung wird es möglich, die Begriffsbildungen und Sätze der algebraischen Geometrie heranzuziehen.*

- *Zu der damaligen Zeit war jedoch die algebraische Geometrie über beliebigen Grundkörpern noch nicht entwickelt. Hasse mußte die einschlägi-*

gen Sätze der Kurventheorie erst selbst entwickeln; er konnte sich nicht auf existierende Literatur berufen.

- *Hasse bevorzugte den birational invarianten Standpunkt; er sprach demgemäß nicht von Kurven, sondern von algebraischen Funktionenkörpern (einer Variablen). Das ermöglichte es ihm, die Analogie zu algebraischen Zahlkörpern als Richtschnur der von ihm zu entwickelnden Theorie auszunutzen.*

6 Die Zetafunktion

Manchmal ergibt sich die Lösung eines mathematischen Problems erst dann, wenn es gelingt, das Problem durch geeignete Umformulierung in einen neuen, andersartigen Zusammenhang zu stellen; die damit gefundene neue Betrachtungsweise führt zu Analogien und Begriffsbildungen aus ganz anderen Bereichen, die ohne diese Umformulierung nicht für das ursprüngliche Problem zur Verfügung gestanden hätten. [4]

Eine solche Situation lag bei dem Problem der diophantischen Kongruenzen vor. Helmut Hasse erkannte, daß dies Problem mit der sog. *Riemannschen Vermutung* für die Zetafunktion von Funktionenkörpern gleichbedeutend ist; durch diese Umformulierung wurde die Aufmerksamkeit der Forscher in eine neue Richtung gelenkt.

Ich gebe zunächst einen knappen historischen Rückblick, um die Quellen aufzuzeigen, aus denen Hasse schöpfen konnte.

Die klassische Zetafunktion $\zeta(s)$ war in der berühmten Arbeit von Riemann im Jahre 1859 eingeführt und untersucht worden. Sie ist definiert durch die Formel

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_n \frac{1}{n^s}. \tag{9}$$

Hierbei durchläuft p alle Primzahlen und n alle positiven natürlichen Zahlen. s ist eine komplexe Variable. Das Produkt und die Summe konvergieren für diejenigen s, deren Realteil $\Re(s) > 1$. Riemann stellte jedoch fest, daß es sich, unabhängig von der formelmäßigen Darstellung (9), um eine analytische Funktion auf der gesamten komplexen Zahlenebene handelt; sie ist überall holomorph außer in dem Punkt $s = 1$, wo sie einen Pol erster Ordnung besitzt.

[4]Ein besonders markantes Beispiel dafür ist die *Fermatsche Vermutung*, um die sich viele Generationen von Mathematikern erfolglos bemüht haben, bis es GERHARD FREY gelang, eine Umformulierung im Rahmen der Theorie der elliptischen Kurven herzustellen.

$\zeta(s)$ genügt einer Funktionalgleichung für die Substitution $s \to 1-s$. Diese schreibt sich besonders einfach, wenn man die Funktion

$$\widetilde{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s) \qquad (10)$$

einführt, nämlich

$$\widetilde{\zeta}(1-s) = \widetilde{\zeta}(s)\,.$$

$\zeta(s)$ besitzt unendlich viele Nullstellen. Und zwar einmal die sog. trivialen Nullstellen; das sind die negativen geraden Zahlen $s = -2, -4, -6, \ldots$. Darüberhinaus hat $\zeta(s)$ unendlich viele weitere Nullstellen; das sind gleichzeitig die Nullstellen von $\widetilde{\zeta}(s)$, und diese liegen alle in dem Streifen $0 < \Re(s) < 1$. Riemann beschrieb das Wachstum des Imaginärteils dieser nichttrivialen Nullstellen und zeigte auf, daß und wie sich das im Rahmen der Primzahltheorie interpretieren läßt. Beiläufig erwähnte er dabei, daß es *„sehr wahrscheinlich"* sei, daß alle nichttrivialen Nullstellen auf der Geraden $\Re(s) = 1/2$ liegen. Er sagt dazu: *„Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen..."*. Dies ist seitdem als die *„Riemannsche Vermutung"* bekannt.

Es ist hier nicht der Ort, zu erläutern, daß und weshalb diese Riemannsche Vermutung eine überragende Bedeutung für die zahlentheoretische Forschung besitzt, insbesondere für die Lehre von den Primzahlen. Es sei nur gesagt, daß sie trotz erheblicher Anstrengung von vielen Seiten bis heute noch nicht verifiziert werden konnte; sie gehört zu den großen ungelösten Problemen der modernen Mathematik.

Der Zusammenhang der Zetafunktion mit der Arithmetik ergibt sich durch die Formel (9). Die Tatsache nämlich, daß in (9) das unendliche Produkt mit der unendlichen Reihe übereinstimmt, beruht auf dem sog. *Hauptsatz über die Primzerlegung*, welcher besagt: Jede natürliche Zahl $n > 0$ läßt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Dedekind hat die Riemannsche Zetafunktion verallgemeinert, indem er für jeden endlich-algebraischen Zahlkörper E eine Zetafunktion $\zeta_E(s)$ einführte. Im Ring der ganzalgebraischen Zahlen aus E gilt nämlich der *Hauptsatz über die Primzerlegung der Ideale*; daher führt der folgende Ansatz zum Ziel:

$$\zeta_E(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathcal{N}(\mathfrak{p})^s}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{\mathcal{N}(\mathfrak{a})^s}\,. \qquad (11)$$

Hierbei durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primideale und $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale $\neq 0$ von E; mit $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$ wird die Norm von $\mathfrak{a}$ bezeichnet. Ist $E = \mathbb{Q}$ der rationale Zahlkörper, so ist $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(s)$ die klassische Riemannsche Zetafunktion.

Auch für die Dedekindsche Zetafunktion gilt: Es handelt sich um eine auf der ganzen komplexen Zahlenebene analytische Funktion, die überall holomorph ist bis auf die Stelle $s = 1$, an der sie einen Pol erster Ordnung besitzt.

Auch für $\zeta_E(s)$ gibt es eine Funktionalgleichung in Bezug auf die Substitution $s \to 1-s$; sie wurde 1917 von Hecke formuliert und bewiesen.

Auch $\zeta_E(s)$ besitzt unendlich viele nichttriviale Nullstellen im kritischen Streifen $0 < \Re(s) < 1$. Die *„verallgemeinerte Riemannsche Vermutung"* besagt, daß sämtliche dieser nichttrivialen Nullstellen auf der Geraden $\Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen; das ist ebenfalls noch offen, genauso wie die ursprüngliche Vermutung von Riemann.

Der Dekekindsche Ansatz hat sich als sehr fruchtbar erwiesen; in der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_E(s)$ ist fast die gesamte arithmetische Struktur des Zahlkörpers E codiert.

Der Erfolg des Dedekindschen Ansatzes legte es nahe, Zetafunktionen auch für andere mathematische Strukturen zu definieren, welche sich ähnlich wie die Zahlkörper verhalten. Dazu gehören die algebraischen Funktionenkörper F einer Variablen über einem endlichen Grundkörper K.

Dedekind selbst hat mehrfach auf die klassische Analogie zwischen Zahlkörpern und Funktionenkörpern hingewiesen. Schon im Jahre 1857 publizierte er dazu seine Arbeit „Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen..." (allerdings ohne auf Zetafunktionen einzugehen; die Riemannsche Arbeit war zu diesem Zeitpunkt noch nicht erschienen). Der Dedekindsche Ansatz wurde in der Dissertation von Emil Artin (1924) wieder aufgenommen und systematisch weitergeführt, und zwar für *quadratische* Funktionenkörper [5] in voller Analogie zu den quadratischen Zahlkörpern. Artin definierte für quadratische Funktionenkörper eine Zetafunktion in Analogie zu der Dedekindschen Zetafunktion von quadratischen Zahlkörpern. Es gibt auch für diese eine analoge „Riemannsche Vermutung", und Artin konnte sie rechnerisch in vielen Fällen verifizieren.

Die Untersuchungen von Artin bildeten den Anlaß zu einer ganzen Reihe von Arbeiten von F.K.Schmidt in den zwanziger und dreißiger Jahren (ab 1925), die sich zum Ziel setzten, die allgemeine Theorie der algebraischen Funktionenkörper auf eine solide Grundlage zu stellen, in voller Analogie zu den Zahlkörpern. Aus der intensiven Korrespondenz von F.K.Schmidt mit Hasse ist zu entnehmen, daß Hasse an diesen Arbeiten regen Anteil genommen und mit F.K.Schmidt einen engen wissenschaftlichen Kontakt gehalten hat. Man kann sagen, daß Hasse und F.K.Schmidt die Analogie der Zahlkörper mit den Funktionenkörpern voll ausgebaut haben, und daß sie somit die Grundlage der Theorie der heute sogenannten *globalen Körper* gelegt haben, die beide Körpertypen umschließt. [6]

Es sei nun F ein algebraischer Funktionenkörper mit endlichem Konstan-

[5] In der Terminologie der algebraischen Geometrie handelt es sich um hyperelliptische Funktionenkörper.

[6] Später (1945) hat E. Artin zusammen mit Whaples die Theorie der globalen Körper auf eine axiomatische Grundlage gestellt, mit Hilfe der Produktformel für Bewertungen.

tenkörper K. Die Definition der F.K.Schmidtschen Zetafunktion für F lautet wie folgt:

$$\zeta_F(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathcal{N}(\mathfrak{p})^s}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{\mathcal{N}(\mathfrak{a})^s}. \tag{12}$$

Hierbei durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren und $\mathfrak{a}$ alle ganzen Divisoren von $F|K$, und $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$ bedeutet die Norm des Divisors $\mathfrak{a}$.

Der Begriff des „Primdivisors" eines Funktionenkörpers $F|K$ ist dabei bewertungstheoretisch definiert, in Anlehnung an die berühmte Arbeit von Dedekind-Weber aus dem Jahre 1880, in welcher die analytische Theorie der Riemannschen Flächen auf eine algebraische Grundlage gestellt wurde. Jeder ganze Divisor von $F|K$ ist in eindeutiger Weise als Produkt von Primdivisoren darstellbar; dieser „Hauptsatz" ermöglicht den Ansatz (12).

Produkt und Reihe in (12) konvergieren für $\Re(s) > 1$. Wiederum stellt sich heraus, daß $\zeta_F(s)$ eine auf der ganzen komplexen Zahlenebene analytische Funktion ist.

Obwohl die Definitionen (12) und (11) scheinbar analog sind, so sind sie es doch nicht ganz. Denn in der Definition (12) der F.K.Schmidtschen Zetafunktion werden *sämtliche* Primidivisoren $\mathfrak{p}$, also *sämtliche* Bewertungen des Funktionenkörpers F berücksichtigt. Dagegen erscheinen bei der Definition (11) der Dedekindschen Zetafunktion nur diejenigen Bewertungen des Zahlkörpers, welche den *Primidealen* des Zahlkörpers E entsprechen. Daneben gibt es bekanntlich in einem Zahlkörper noch endlich viele *archimedische* Bewertungen. Um eine volle Analogie der Zetafunktion von Funktionenkörpern mit der von Zahlkörpern zu erhalten, müßte man die Dedekindsche Definition (11) noch erweitern um endlich viele Faktoren, die den archimedischen Bewertungen eines Zahlkörpers entsprechen. Das ist in der Tat möglich, aber ich will im einzelnen hier nicht näher darauf eingehen. Im Falle des rationalen Zahlkörpers, $E = \mathbb{Q}$, gibt es nur eine einzige archimedische Bewertung, und der zugehörige Faktor ist $\pi^{s/2}\,\Gamma(s/2)$; dieser Faktor trat bereits in natürlicher Weise in der Funktionalgleichung (10) auf und führte zur „erweiterten" Zetafunktion $\tilde{\zeta}(s)$.

Die F.K.Schmidtsche Zetafunktion für Funktionenkörper $\zeta_F(s)$ ist demnach als Analogon der „erweiterten" Dedekindschen Zetafunktion $\tilde{\zeta}_E(s)$ für Zahlkörper anzusehen. F.K.Schmidt nimmt damit den natürlichen, birationalen Standpunkt ein, den auch Hasse immer wieder propagiert hat. Insofern unterscheidet sich die F.K.Schmidtsche Zetafunkton noch von der Zetafunktion bei Artin, bei dem einige Primdivisoren, die als „unendlich" galten, nicht in das Produkt (12) aufgenommen wurden. Dementsprechend waren bei Artin noch „triviale" Nullstellen zu berücksichtigen, während die F.K.Schmidtsche Zetafunktion $\zeta_F(s)$ keine trivialen Nullstellen besitzt.

Wie im Falle von Zahlkörpern gibt es auch für die Zetafunktion eines

Funktionenkörpers eine Funktionalgeichung bei der Substitution $s \to 1-s$. Sie besagt, daß $q^{(g-1)s}\zeta_F(s)$ bei jener Substitution invariant ist:

$$q^{(g-1)s}\zeta_F(s) = q^{(g-1)(1-s)}\zeta_F(1-s) \tag{13}$$

Hierbei bedeutet q, wie üblich, die Anzahl der Elemente des Grundkörpers K. Ferner ist g das *Geschlecht* des Funktionenkörpers F.

Der Begriff des Geschlechts stammt aus der komplexen Analysis der algebraischen Funktionen; das Geschlecht einer kompakten Riemannschen Fläche wird topologisch definiert als die Anzahl der Erzeugenden der Fundamentalgruppe, oder analytisch als die Anzahl der linear unabhängigen holomorphen Diffentiale auf der Fläche. Es ist eine besondere Leistung von F.K.Schmidt, erkannt zu haben, daß es auch eine algebraische Beschreibung des Geschlechts gibt, die dann in der algebraischen Theorie der Funktionenkörper als Definition genommen werden kann. Und zwar wird das Geschlecht algebraisch mit Hilfe des *Riemann-Rochschen Satzes* definiert; dieser wurde von F.K.Schmidt für beliebige algebraische Funktionenkörper (mit vollkommenem Konstantenkörper) formuliert und bewiesen. Der Riemann-Rochsche Satz ist die Quelle der Funktionalgleichung (13).

Die *Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern* besagt nun, daß alle Nullstellen von $\zeta_F(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = 1/2$ liegen. Eigentlich müßte man genauer von dem „Analogon zur Riemannschen Vermutung" sprechen, denn Riemann selbst hat Zetafunktionen von Funktionenkörpern überhaupt nicht betrachtet und daher für diese auch nichts vermutet. Der Kürze halber verzichten wir jedoch manchmal auf den Zusatz „Analogon", da sich das von selbst versteht.

Nach der Variablensubstitution $t = q^{-s}$ wird $\zeta_F(s)$ zu einer *rationalen Funktion in der Variablen t*; das hatte F.K.Schmidt als Folge des Riemann-Rochschen Satzes erkannt. Wir bezeichnen die so entstehende rationale Funktion mit $Z_F(t)$; es ist also $Z_F(q^{-s}) = \zeta_F(s)$. Nach F.K.Schmidt besitzt $Z_F(t)$ die folgende Form:

$$Z_F(t) = \frac{L_F(t)}{(1-t)(1-qt)} \tag{14}$$

wobei $L_F(t)$ ein Polynom vom Grad $2g$ ist. Diese Darstellung setzt in Evidenz, daß $Z_F(t)$ die beiden Pole für $t = 1$ und $t = q^{-1}$ besitzt; dies entspricht den Werten $s = 0$ und $s = 1$. [7] Die Nullstellen von $Z_F(t)$ sind nun genau die Nullstellen von $L_F(t)$, und die *Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern* besagt jetzt, daß alle $2g$ Nullstellen des Polynoms $L_F(t)$ den Betrag $q^{-1/2}$ besitzen.

[7] $\zeta_F(s)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode $w = 2\pi i/\log q$; daher gehören zu den Polen $s = 0, 1$ noch weitere Pole, die sich daraus durch Verschiebung um ganzzahlige Vielfache von w ergeben.

Wie man aus der Definition leicht herleiten kann, besitzt das Polynom $L_F(t)$ die folgende Form:

$$L_F(t) = 1 + (N - q - 1) \cdot t + \cdots + q^g \cdot t^{2g}\,; \tag{15}$$

hierbei bedeutet $N = N(F)$ die Anzahl der Primdivisoren ersten Grades von F. Wir zerlegen $L_F(t)$ in $2g$ Linearfaktoren:

$$L_F(t) = \prod_{1 \le i \le 2g} (1 - \omega_i t)\,.$$

Die ω_i sind die *reziproken Nullstellen* von $L_F(t)$; die Riemannsche Vermutung für $Z_F(t)$ besagt daher, daß alle ω_i den Betrag $q^{1/2}$ besitzen:

$$|\omega_i| = q^{1/2} \qquad (1 \le i \le 2g)\,. \tag{16}$$

Ist das der Fall, so ergibt sich

$$|N - q - 1| \le 2g \cdot q^{1/2} \tag{17}$$

denn nach (15) ist $N - q - 1 = -\sum_{1 \le i \le 2g} \omega_i$. Es folgt:

$$N = q + \mathcal{O}(q^{1/2})\,. \tag{18}$$

Umgekehrt läßt sich aus (18) die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung in Funktionenkörpern ableiten.

Wir nehmen nun an, daß der Funktionenkörper F eine Erzeugung der Form

$$F = K(x,y) \qquad \text{mit} \qquad f(x,y) = 0$$

besitzt, wobei $f(x,y)$ ein absolut irreduzibles Polynom mit Koefizienten aus K ist. Dann haben wir einerseits die eben definierte Zahl $N = N(F)$ der Primdivisoren ersten Grades von F, und andererseits die im Zusammenhang mit (7) definierte Anzahl $N(f)$ der Lösungen a, b in K von $f(x,y) = 0$. Beidemale wurden diese Zahlen mit N bezeichnet; jetzt sollten wir sie aber unterscheiden und schreiben also $N(F)$ und $N(f)$. Es läßt sich nun zeigen, daß $N(F)$ und $N(f)$ von derselben Größenordnung sind; es gilt nämlich

$$|N(F) - N(f)| \le s$$

wobei s eine von q unabhängige Konstante ist; sie berechnet sich aus dem Singularitätsgrad der durch $f(x,y) = 0$ gegebenen Kurve und dem Grad des Polynoms $f(x,y)$.

Folglich sind die durch (7) und (18) gegebenen Aussagen für $N(f)$ und $N(F)$ gleichbedeutend.

Zusammenfassung:

- *In den zwanziger Jahren, ab 1925, entwickelte F.K.Schmidt in mehreren Arbeiten die Theorie der algebraischen Funktionenkörper, in Analogie zur Theorie der algebraischen Zahlkörper. An diesen Arbeiten nahm Hasse regen Anteil und hat sie stark beeinflußt.*

- *Die Motivation dazu ergab sich aus dem Bestreben, die Ergebnisse der Dissertation von E. Artin auf beliebige, nicht notwendig quadratische Funktionenkörper zu erweitern. Man folgte damit der von Dedekind ausgehenden historischen Linie, welche als Desideratum die Behandlung der algebraischen Funktionenkörper in vollständiger Analogie zu den algebraischen Zahlkörpern aufstellte.*

- *Insbesondere wurden durch F.K.Schmidt und Hasse die grundlegenden Eigenschaften der Zetafunktion von algebraischen Funktionenkörpern erarbeitet. Und zwar in voller Analogie zu den Eigenschaften der Dedekindschen Zetafunktion von algebraischen Zahlkörpern. Dedekind seinerseits knüpfte mit seinem Ansatz an die klassische Riemannsche Zetafunktion an.*

- *Aufgrund ihrer Arbeiten war es Hasse und F.K.Schmidt bekannt, daß die Riemannsche Vermutung für die Zetafunktion eines Funktionenkörpers F gleichbedeutend ist mit der Abschätzung* (17) *für die Anzahl der Primidivisoren ersten Grades von F. Ebenfalls war es bekannt, daß* (17) *gleichbedeutend ist mit dem Problem* (7) *über diophantische Kongruenzen, zu dem Hasse durch Davenport angeregt worden war.*

7 Der Beweis

Wir kommen jetzt zu dem Hasseschen Beweis der Riemannschen Vermutung für einen elliptischen Funktionenkörper $F|K$.

In der Hasseschen Terminologie heißt ein Funktionenkörper $F|K$ „elliptisch", wenn sein Geschlecht $g = 1$ ist, während sich heute mehr die Terminologie so durchgesetzt hat, daß gleichzeitig die Existenz eines Primdivisors ersten Grades verlangt wird, sodaß in der Tat $F|K$ der Funktionenkörper einer elliptischen Kurve ist. Weil nun der Konstantenkörper K endlich ist, so ist diese letztere Bedingung von selbst erfüllt; das hatte schon F.K. Schmidt als Nebenresultat seiner Theorie der Zetafunktionen gezeigt.

Mit den heute vorliegenden Kenntnissen und Begriffsbildungen läßt sich der Hassesche Beweis einfach und übersichtlich darstellen und nimmt nur wenige Zeilen ein. Nämlich wie folgt:

$F|K$ ist der Funktionenkörper einer über K definierten „elliptischen Kurve" $\mathcal{E}$, worunter man heute eine eindimensionale abelsche Varietät versteht.

Die Primdivisoren vom Grad 1 von $F|K$ entsprechen den K-rationalen Punkten von $\mathcal{E}$.

Es sei M der Ring der Endomorphismen dieser elliptischen Kurve. Die Struktur von M ist bekannt, nämlich von einem der folgenden Typen:

I. *Entweder* ist M eine Ordnung in einem imaginär-quadratischen Zahlkörper.

II. *Oder* M ist eine Maximalordnung in demjenigen Quaternionenschiefkörper über $\mathbb{Q}$, der nur an den Stellen p und ∞ verzweigt ist.

In diesem Zusammenhang wird unter „Ordnung" eine endlich-erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra verstanden, und zwar vom maximalen Rang, d.h. Rang 2 im Falle eines quadratischen Zahlkörpers und Rang 4 im Falle eines Quaternionenschiefkörpers.

Bei beliebigem Grundkörper käme als dritter Typ auch noch der Fall $\mathsf{M} = \mathbb{Z}$ in Frage; dann sagt man „$\mathcal{E}$ besitzt keine komplexe Multiplikation". Dieser Fall tritt bei endlichem Grundkörper nicht auf.

Sei $\mu \in \mathsf{M}$. Als Endomorphismus $\mu\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ besitzt μ einen Grad. Wenn μ separabel ist, so ist $\mathrm{Grad}(\mu)$ gleich der Ordnung des Kerns von μ, also gleich der Anzahl der Punkte $P \in \mathcal{E}$ mit $\mu P = 0$.

Wird μ als Element der Ordnung M über $\mathbb{Z}$ betrachtet, so besitzt μ auch eine Norm $\mathcal{N}(\mu)$; falls M nichtkommutativ ist, so ist wie üblich die *reduzierte* Norm gemeint. Norm und Grad eines Endomorphismus $\mu \in \mathsf{M}$ stimmen überein:

$$\mathcal{N}(\mu) = \mu\overline{\mu} = \mathrm{Grad}(\mu)\,.$$

Hierbei bedeutet $\overline{\mu}$ die Konjugierte zu μ. Da μ in jedem der obigen Fälle I. und II. eine *imaginär-quadratische* Zahl ist, so ist $|\overline{\mu}| = |\mu|$, und somit

$$|\mu| = \sqrt{\mathrm{Grad}(\mu)}.$$

Der *Frobenius-Endomorphismus* $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ über K ist dadurch definiert, daß die Koordinaten eines jeden Punktes $P \in \mathcal{E}$ in die q-te Potenz erhoben werden; dabei bedeutet q, wie üblich, die Elementezahl von K. Der Frobenius-Endomorphismus ist rein inseparabel vom Grad q, und daher nach Obigem

$$|\pi| = \sqrt{q}\,. \tag{19}$$

Aus der Definition von π folgt, daß die K-rationalen Punkte $P \in \mathcal{E}$ durch die Relation $\pi P = P$ gekennzeichnet sind, also durch $(\pi - 1)P = 0$; sie bilden demnach den Kern des Endomorphismus $\pi - 1$. Da $\pi - 1$ separabel ist, so ist die Anzahl N der K-rationalen Punkte gleich dem Grad von $\pi - 1$, also

$$N = \mathcal{N}(\pi - 1) = (\pi - 1)(\overline{\pi} - 1) = \mathcal{N}(\pi) - \mathcal{S}(\pi) + 1$$

wobei $\mathcal{S}(\pi) = \pi + \overline{\pi}$ die Spur von π bedeutet. Weil $\mathcal{N}(\pi) = q$, so folgt $\mathcal{S}(\pi) = -(N - q - 1)$, und somit besitzt das charakteristische Polynom von π die Form:

$$P(t) = (t - \pi)(t - \overline{\pi}) = t^2 + (N - q + 1)t + q\,.$$

Dies ist, weil $g = 1$, gerade das reziproke Polynom zu $L_F(t)$ in (15), d.h.

$$P(t) = t^2 L_F(t^{-1})\,.$$

Die Nullstellen ω_1, ω_2 von $t^2 L_F(t^{-1})$ stimmen also mit den Nullstellen $\pi, \overline{\pi}$ von $P(t)$ überein. Die letzteren besitzen den Betrag $\sqrt{q}$, wie in (19) bemerkt. Also:

$$|\omega_1| = |\omega_2| = \sqrt{q}\,.$$

Das ergibt (16).
□

Zwar gibt es heutzutage „elementare“ Beweise in dem Sinne, daß dabei weniger Vorkenntnisse über Endomorphismen elliptischer Kurven benutzt werden. Aber der vorstehende Beweis ist besonders kurz und durchsichtig, und er ist der Situation genau angepaßt. Hinzu kommt, worauf Hasse besonderen Wert gelegt hat, daß nicht nur der absolute Betrag der Nullstellen von $L_F(t)$ bestimmt wird, sondern daß darüberhinaus diese Nullstellen eine arithmetische Deutung erfahren, nämlich innerhalb der imaginär-quadratischen Ordnung M als die konjugiert-komplexen, geeignet normierten Faktoren einer Zerlegung

$$q = \pi\overline{\pi}.$$

Hasse selbst konnte aber nicht direkt wie oben argumentieren, weil nämlich die hierbei verwendeten Begriffe und Theorien, die heute mathematisches Allgemeingut sind, zu Hasses Zeiten noch garnicht vorlagen. Das gilt sowohl für die Grundbegriffe der algebraischen Geometrie wie z.Bsp. *Varietät, Dimension, allgemeiner Punkt*, als auch für die fortgeschrittenere Theorie der *abelschen Mannigfaltigkeiten* und ihrer *Endomorphismen*. Der Prozeß der Algebraisierung, der das Arsenal dieser Begriffe und Resultate auch für Körper von Primzahlcharakteristik nutzbar machte, war erst am Entstehen.

Hasse gebührt das Verdienst, die algebraische Theorie im Falle elliptischer Kurven konzipiert und von Grund auf entwickelt zu haben, jedenfalls so weit, daß damit die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung gezeigt werden konnte. Gleichzeitig hat er aber, über den Fall elliptischer Funktionenkörper hinaus, die allgemeine Theorie der algebraischen Funktionenkörper entwickelt. Denn von vorneherein hatte er auch den Beweis der Riemannschen Vermutung für beliebiges Geschlecht im Auge. Darüberhinaus wollte er die Theorie algebraischer Funktionenkörper auch für andere zahlentheoretische Probleme bereitstellen, z.Bsp. für Probleme diophantischer Gleichungen statt diophantischer Kongruenzen.

Das war ein weit gespanntes Programm. Es erstaunt daher nicht, daß mehrere Jahre vergingen, bis das Programm so weit durchgeführt war, daß Hasse der mathematischen Öffentlichkeit schließlich seinen Beweis der Riemannschen Vermutung im elliptischen Falle vorstellen konnte.

Wir geben nun eine Liste der diesbezüglichen Arbeiten Hasses, mit kurzen Kommentaren. Eine ausführlichere Würdigung dieser Arbeiten behalten wir uns für später vor.

(1) *Über die Kongruenzzetafunktionen. Unter Benutzung von Mitteilungen von Prof. Dr. F.K. Schmidt und Prof. Dr. E. Artin.* 1934, 14 S.

Enthält eine systematische Darstellung der Theorie der Zetafunktionen von Funktionenkörpern über endlichen Körpern.

(2) *Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern.* 1934, 24 S.

Ausarbeitung von Gastvorträgen Hasses an der Universität Hamburg. In diesen Vorträgen entwickelt Hasse sein Konzept. Dabei wird unter „komplexer Multiplikation" die Theorie des Endomorphismenringes einer elliptischen Kurve verstanden. Für die Einzelbeweise verweist Hasse auf „demnächst" zu veröffentlichende Arbeiten.

(3) *Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper.* 1934, 15 S.

Es wird gezeigt, daß die aus der Literatur bekannten Probleme der Abschätzung von *Exponentialsummen, Klostermannschen Summen, Charaktersummen etc.* sich sämtlich auf die Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern zurückführen lassen, und zwar mit der bestmöglichen Abschätzung der Größenordnung $q^{1/2}$, wie bei dem Problem der diophantischen Kongruenzen. Allerdings reicht dazu der elliptische Fall i.allg. nicht aus, sondern es handelt sich um Funktionenkörper höheren Geschlechts, nämlich um Artin-Schreier- bezw. Kummer-Erweiterungen rationaler Körper. Dies alles wird, ganz im Stil Hasses, in eine systematische, allgemeine Theorie der zyklischen Erweiterungen von Funktionenkörpern eingeordnet, die auch unter klassenkörpertheoretischen Gesichtspunkten diskutiert wird.

Nachdem die Riemannsche Vermutung schließlich durch A. Weil auch für höheres Geschlecht bewiesen worden war, erlangte diese Arbeit besondere Bedeutung für zahlentheoretische Anwendungen und ist auch heute noch aktuell.

(4) *Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen. Gemeinsam mit H. Davenport.* 1934, 32 S.

Dies ist eine Anschlußarbeit an die vorangehend aufgeführte. Die „gewissen zyklischen Fälle" sind Funktionenkörper mit den definierenden Gleichungen $x^m + y^n = 1$ sowie $y^p - y = x^m$ in Charakteristik p, wobei m, n teilerfremd zu p sind, und der Grundkörper K so groß zu nehmen ist, daß m und n Teiler von $q-1$ werden. In diesen Fällen nämlich gelingt die arithmetische Interpretation der Nullstellen der Zetafunktion durch Gaußsche bezw. Jacobische Summen, deren Absolutbetrag aus der Zahlentheorie bekannt ist. Damit ist dann auch die Riemannsche Vermutung in diesen Fällen bewiesen.

Hasse und Davenport waren also die ersten, welche die Riemannsche Vermutung auch für höheres Geschlecht in in einer allgemeinen Situation beweisen konnten.

Davenport hatte sich bereits seit einiger Zeit mit dem Problem der diophantischen Kongruenzen $ax^m + by^n \equiv 1 \mod p$ beschäftigt, aber er hatte es nicht vermocht, bis zur bestmöglichen Abschätzung des Fehlergliedes durch $O(q^{1/2})$ vorzudringen. Er hatte Hasse dazu in einem Brief gefragt: „*can you help me?*“ Diese Arbeit ist offenbar ein Ausfluß der daran anschließenden Diskussion zwischen Davenport und Hasse.

Die Arbeit ist auch heute noch sehr aktuell.

Eigentlich hatten Hasse und Davenport vor, zwei verschiedene Arbeiten zu diesem Thema anzufertigen, eine „high brow“ (das ist wohl diese, an die Hassesche Theorie der zyklischen Funktionenkörper anknüpfende), und eine „low brow“ (die wohl mehr den Vorstellungen von Davenport entsprechende). Zu der zweiten ist es aber dann nicht mehr gekommen. Möglicherweise kann die Arbeit von Davenport: „*Character sums in finite fields*“, die 1939 in den Acta Mathematica erschien, als Weiterentwicklung der geplanten gemeinsamen zweiten Arbeit gelten.

(5) *Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper.* 1934, 10 S.

Übertragung des analytischen Begriffs des Differentials auf einer Riemannschen Fläche in die Algebra der Funktionenkörper, unter besonderer Berücksichtigung der in Charakteristik p durch Inseparabilität zusätzlich auftretenden Probleme. Es wird der Zusammenhang mit dem durch F.K. Schmidt bewiesenen algebraischen Satz von Riemann-Roch hergestellt. Die Arbeit enthält den ersten algebraischen Beweis des Residuensatzes.

(6) *Existenz separabler zyklischer unverzweigter Erweiterungskörper vom Primzahlgrad p über elliptischen Funktionenkörpern der Charakteristik p.* 1934, 9 S.

Hier findet sich die Definition der Hasseschen Invariante A eines elliptischen Funktionenkörpers $F|K$ von Primzahlcharakteristik p. Das Nichtverschwinden von A reguliert die Existenz von unverzweigten zyklischen Erweiterungen von F vom Grad p. Hasse hatte entdeckt, *erstens* daß es möglich ist, daß F überhaupt keine echten solchen Erweiterungen zuläßt, und zwar wenn $A = 0$ (das sind die heute sogenannten *supersingulären* elliptischen Funktionenkörper); *zweitens* aber daß es auch bei $A \neq 0$ nur eine einzige solche Erweiterung gibt (bei algebraisch abgeschlossenem Grundkörper

K). Dies ist ein wichtiger und wesentlicher Unterschied zu den Verhältnissen in Charakteristik 0, und spielt eine besondere Rolle bei der Diskussion des Frobenius-Endomorphismus.

(7) *Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrad p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p. Gemeinsam mit E. Witt.* 1936, 16 S.

Verallgemeinerung der Invariante A für Funktionenkörper beliebigen Geschlechts $g \geq 1$; hier ist sie eine quadratische g-reihige Matrix, die heute als „Hasse-Witt Matrix" bezeichnet wird. Interessant ist das folgende Zitat aus dieser Arbeit:

> *Diese Verallgemeinerung hat für den Beweis der Riemannschen Vermutung für algebraische Funktionenkörper beliebigen Geschlechts über einem endlichen Konstantenkörper dieselbe Bedeutung wie im bereits durchgeführten Spezialfall des Geschlechts* 1.

(8) *Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik.* 1936, 5 S.

Es werden hier die höheren Derivationen so eingeführt, daß sie auch bei Charakteristik p brauchbar bleiben. Die Arbeit enthält eigentlich kein Resultat im eigentlichen Sinne, sondern stellt nur fest, daß man auch bei Charakteristik p mit höheren Derivationen und Differentialen in derselben Weise umgehen kann wie in Charakteristik 0 – vorausgesetzt, daß man die Rechnungen von den in der gewöhnlichen Analysis auftretenden Zahlfaktoren befreit.

Noch im selben Band des Crelleschen Journals, in dem diese Arbeit erschien, hat Teichmüller eine wesentlich vereinfachte Version geliefert. Und im nächsten Band publizierte Hasse Auszüge aus einer Korrespondenz mit F.K. Schmidt, in denen eine nochmals vereinfachte Form der Darstellung geliefert wurde. Seitdem spricht man in der Literatur von den „Hasse-F.K.Schmidtschen Derivationen." Sie werden heute in der algebraischen Differentialrechnung standardmäßig benutzt.

(9) *Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper* I, II, III. 1936, 47, 48, 49 S.

Jetzt endlich ist Hasse in der Lage, den bereits in Hamburg angekündigten Beweis der Riemannschen Vermutung im elliptischen Fall durchzuführen. Gegenüber seiner Ankündigung in Hamburg aus dem Jahre 1934 haben sich, so sagt er, in den einzelnen Beweisen erhebliche Vereinfachungen ergeben.

In dem Vorwort erläutert Hasse, daß er es soweit nur irgend möglich vermeide, spezielle explizite Formeln oder Vorkenntnisse über elliptische Körper auszunutzen, selbst auf die Gefahr hin, daß seine Ausführungen reichlich abstrakt erscheinen. Dies, so sagt Hasse, ist im Hinblick auf die Aufgabe der Verallgemeinerung auf beliebiges Geschlecht angebracht. Außerdem fügt sich der Fall der Charakteristik $p = 2$ zwanglos ein, es braucht keine Ausnahme mehr gemacht zu werden, wie es z.Bsp. nötig wäre, wenn explizite Additionsformeln benutzt würden.

Die ganze Theorie wird zunächst für einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper K durchgeführt. Erst am Schluß, wenn der Frobenius-Endomorphismus ins Spiel kommt, wird vorausgesetzt, daß K der algebraische Abschluß eines endlichen Körpers ist.

In *Teil I* wird die Struktur der Torsionsgruppe einer elliptischen Kurve bestimmt, so wie wir sie heute kennen. Das ist wichtig, um später den Grad eines natürlichen Multiplikators zu bestimmen: $\mathrm{Grad}(n) = n^2$. Im klassischen Fall der Charakteristik 0 ist das aus der Uniformisierungstheorie der elliptischen Kurven bekannt und evident. In Charakteristik p ergeben sich jedoch ganz neuartige Verhältnisse, wenn n eine Potenz von p ist.

In *Teil II* geht es um Endomorphismen einer elliptischen Kurve. Hasse benutzt dafür das Wort „Meromorphismen" eines elliptischen Funktionenkörpers; die Definition ist genau dieselbe wie sie heute, im Rahmen der algebraischen Geometrie, für Endomorphismen (bezw. Isogenien) üblich ist. Einige Probleme bereitet die Definition der Addition von Meromorphismen, was Hasse das *Additionstheorem* nennt. Das liegt daran, daß Hasse eben noch nicht die Hilfsmittel der algebraischen Geometrie zur Verfügung hatte und insbesondere auch nicht den Begriff einer algebraischen Gruppe.

In *Teil III* geht es nun um die Struktur des Endomorphismenrings M. Grundlegend für alle Strukturaussagen ist die „Normenadditionsformel" für $\mu, \nu \in \mathsf{M}$:

$$\mathcal{N}(\mu + \nu) + \mathcal{N}(\mu - \nu) = \mathcal{N}(\mu) + \mathcal{N}(\nu), \tag{20}$$

wobei anzumerken ist, daß die „Norm" eines Meromorphismus bei Hasse so definiert ist, daß sie mit dem übereinstimmt, was wir heute „Grad" nennen. Erst später, nämlich als Ausfluß der Hasseschen Normenadditionsformel, stellt sich heraus, daß der Grad mit der Norm übereinstimmt.

Aus den Aufzeichnungen von Hasse und seinem Briefwechsel mit Davenport ist zu entnehmen, daß er um die richtige Formulierung der Normenadditionsformel sehr gerungen hat. Davenport hatte ihm in einem Brief mitgeteilt, daß mit der Definition $|\mu| = \sqrt{\mathcal{N}(\mu)}$ die Dreiecksungleichung

$$|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$$

gilt, daß also die Funktion $|\cdot|$ eine Bewertung auf M ist. Dadurch wurde schließlich Hasse angeregt, nach der endgültigen Form einer Normenadditionsformel zu suchen, und erhielt eben (20). Diese Formel besagt, daß sich die Normfunktion verhält wie eine positiv definite quadratische Form auf M.

Hieraus ergeben sich für den Endomorphismenring M sofort die bereits oben erwähnten Strukturaussagen: *Entweder* $\mathsf{M} = \mathbb{Z}$, *oder* M ist eine Ordnung in einem imaginär quadratischen Zahlkörper, *oder* M ist eine Ordnung in einer imaginär quadratischen Divisionsalgebra. In der klassischen, analytischen Theorie kommen nichtkommutative Endomorphismenringe bei Geschlecht 1 nicht vor; die Entdeckung solcher nichtkommutativer Strukturen in Charakteristik p, und zwar im supersingulären Fall, kam völlig unerwartet. Die genaue Bestimmung der möglichen Ordnungen wurde später durch Deuring durchgeführt.

Nach all diesen Vorbereitungen ergibt sich der Beweis der Riemannschen Vermutung nun nach dem bereits oben erwähnten Schema, nämlich durch Anwendung der allgemeinen Theorie auf den Frobenius-Endomorphismus der gegebenen elliptischen Kurve.

(10) *Punti razionali sopra curve algebriche a congruenze.* 1943, 56 S.

Es handelt sich nicht nur um eine Darstellung des Hasseschen Beweises für den elliptischen Fall, sondern auch um ein Konzept für beliebiges Geschlecht g. Und zwar stellt Hasse die inzwischen publizierte Deuringsche Theorie der Korrespondenzen und Multiplikatoren für Funktionenkörper beliebigen Geschlechts vor. Diese Arbeit wurde deshalb in italienischer Sprache geschrieben, weil Hasse hoffte, dadurch das Interesse italienischer Geometer zu wecken und Anregungen aus dem Fundus der italienischen algebraischen Geometrie zu erhalten. In der Tat war ja die Deuringsche Theorie nach dem Muster der Korrespondenzentheorie der klassischen algebraischen Geometrie modelliert. Es hätte nur noch eines relativ geringen Anstoßes bedurft, um die Sätze von Severi in die Deuringsche Theorie zu integrieren, womit sich dann auch ein Beweis der Riemannschen Vermutung für beliebiges Geschlecht ergeben hätte. [8]

Dazu ist es jedoch nicht mehr gekommen, bevor André Weil 1948 seine Beweise der Riemannschen Vermutung publizierte. Bemerkenswert ist, daß einer der beiden von Weil angegebenen Beweise genau in derselben Richtung liegt, wie sie Deuring mit seinen Arbeiten vorgegeben hatte. Zusätzlich konnte sich A. Weil auf die von ihm selbst entwickelte algebraische Theorie der Schnittmultiplizitäten der algebraischen Geometrie stützen; das brachte dann den Durchbruch.

(11) *La conjetura de Riemann para cuerpos de funciones sobre cuerpos de constantes finitos.* 1957, 142 S.

Ausarbeitung einer Vorlesung über den Problemkreis der Riemannschen Vermutung für Funktionenkörper, einschließlich des inzwischen erfolgten Beweises für beliebiges Geschlecht.

Zusammenfassung:

- *Die Hassesche Grundidee seines Beweises im elliptischen Fall ist besonders einfach und durchsichtig. Sie beruht auf den Struktursätzen für*

[8] Ich habe das in meiner Dissertation 1951 in Evidenz gesetzt.

den Endomorphismenring einer elliptischen Kurve und deren Anwendung auf den Frobenius-Endomorphismus.

- *Zur Zeit Hasses waren die für einen solchen Beweis notwendigen Grundbegriffe der algebraischen Kurvengeometrie und der algebraischen Funktionenkörper noch nicht verfügbar. Es gab auch keine algebraische Theorie der Endomorphismenringe elliptischer Kurven. Hasse mußte daher die algebraische Theorie von Grund auf entwickeln. Das war ein großes Projekt; die endgültige Fassung des Beweises der Riemannschen Vermutung im elliptischen Fall konnte erst 1936 veröffentlicht werden.*
- *Bei der Durchführung des genannten Projekts hat Hasse die algebraische Theorie der Funktionenkörper beliebigen Geschlechts entwickelt und sich nicht nur auf den elliptischen Fall beschränkt. In der Tat hatte er von Anbeginn den Beweis der Riemannschen Vermutung für beliebiges Geschlecht im Auge.*
- *In einigen zyklischen Fällen gelang es Hasse und Davenport in der Tat, die Riemannsche Vermutung auch für Funktionenkörper höheren Geschlechts zu beweisen. Die dabei betrachteten Kurven werden heute als „Hasse-Davenport-Kurven“ bezeichnet und sind noch aktuell.*
- *Die von Hasse angeregten Arbeiten von Deuring zur Korrespondenzentheorie bildeten einen wesentlichen Fortschritt in Richtung auf den Beweis für höheres Geschlecht. Es hätte nur noch eines geringen Anstosses bedurft, um schließlich zu dem Beweis vorzudringen. Dazu kam es jedoch nicht mehr, denn 1948 publizierte A. Weil seinen Beweis für beliebiges Geschlecht. Und zwar benutzt der Beweis wesentlich denselben Ansatz wie Deuring, stützt sich aber außerdem auf die von A. Weil inzwischen entwickelte algebraische Theorie der Schnittmultiplizitäten.*

8 Komplexe Multiplikation

Im vorstehenden Abschnitt haben wir eine Liste der Hasseschen Arbeiten zur Riemannschen Vermutung gegeben. Eine Arbeit haben wir darin jedoch noch nicht aufgeführt, nämlich die erste, in der er sich mit diesem Thema beschäftigte. Sie erschien bereits im Jahre 1933, als „Vorläufige Mitteilung“ in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. [9] Dort gibt Hasse eine Beweisskizze, welche sich *nicht* auf die algebraische Theorie der elliptischen Kurven und ihrer Endomorphismen stützt (diese war ja noch nicht vorhanden), sondern sich die Beobachtung zunutze macht, daß sich jede über einem endlichen Körper definierte elliptische Kurve als Reduktion

[9] Vorgelegt von E. Landau in der Sitzung am 28. April 1933.

einer geeigneten, in Charakteristik 0 definierten Kurve *mit komplexer Multiplikation* gewinnen läßt. Danach hat Hasse diese Beweisvariante nicht weiter verfolgt; schon 1934 in seinen Hamburger Vorträgen hatte er das Konzept geändert. Die neue Fassung erscheint in der Tat systematischer und natürlicher als der erste Beweis; dieser ist aber deshalb für uns interessant, weil wir vielleicht daran die historische Entwicklung verfolgen können.

Die Theorie der komplexen Multiplikation [10] geht auf Abel zurück, wurde später von Kronecker und Weber ausgebaut und gab schließlich den Anstoß zu der Entwicklung der allgemeinen Klassenkörpertheorie durch Takagi, Artin und Hasse. Zunächst handelt es sich dabei einfach um eine analytisch begründete Theorie der Endomorphismenringe elliptischer Kurven, nämlich wie folgt.

Eine elliptische Kurve über dem komplexen Zahlkörper $\mathbb{C}$ kann aufgefaßt werden als Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = 1$. Jede solche Fläche ist analytisch isomorph zu dem Faktorraum $\mathbb{C}/\mathfrak{w}$, wobei $\mathfrak{w}$ das Gitter der Integralperioden $\int_\gamma \omega$ bedeutet, unter ω ein holomorphes Differential auf der Riemannschen Fläche verstanden (es ist bis auf konstante Faktoren eindeutig bestimmt). γ durchläuft die geschlossenen Kurven auf der Riemannschen Fläche (diese ist ein Torus). $\mathfrak{w}$ ist eindeutig bestimmt bis auf komplexe Faktoren. Der Funktionenkörper der elliptischen Kurve wird erzeugt von der Weierstraßschen $\wp$-Funktion und ihrer Ableitung:

$$F = \mathbb{C}(\wp, \wp')$$

wobei

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{w\in\mathfrak{w}\\ w\neq 0}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right).$$

Zwischen $\wp$ und $\wp'$ besteht die algebraische Gleichung in „Weierstraßscher Normalform“

$$\wp'^{\,2} = 4\wp^4 - g_2\wp - g_3$$

wobei

$$g_2 = g_2(\mathfrak{w}) = 60 \sum_{\substack{w\in\mathfrak{w}\\ w\neq 0}} w^{-4}, \qquad g_3 = g_3(\mathfrak{w}) = 140 \sum_{\substack{w\in\mathfrak{w}\\ w\neq 0}} w^{-6}. \tag{21}$$

Die Invariante $j(\mathfrak{w})$ des Gitters berechnet sich wie folgt:

$$j(\mathfrak{w}) = 12^3 \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

[10] Wenn wir in diesem Abschnitt von „komplexer Multiplikation“ sprechen, so ist dabei stets die klassische Theorie der komplexen Multiplikation in Charakteristik 0 gemeint.

Dies sind die klassischen Formeln zur Uniformisierung der elliptischen Kurven. Die durch das Gitter $\mathfrak{w}$ uniformisierte elliptische Kurve bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_{\mathfrak{w}}$.

Ein *Multiplikator* von $\mathfrak{w}$, oder von $\mathcal{E}_{\mathfrak{w}}$, ist nun definiert als eine komplexe Zahl μ für welche $\mu\mathfrak{w} \subset \mathfrak{w}$. Der Ring M aller solcher Multiplikatoren enthält $\mathbb{Z}$. Wenn es noch einen weiteren Multiplikator in M gibt, so ist dieser nicht reell; man spricht dann von *komplexer Multiplikation* – davon hat die ganze Theorie ihren Namen. [11]

Wenn der Multiplikatorenring M komplex ist, dann ist er notwendig eine Ordnung in einem imaginär quadratischen Zahlkörper Ω. Das Periodengitter $\mathfrak{w}$ kann dann nach Multiplikation mit einem Faktor so normiert werden, daß es in Ω enthalten ist. Hasse schreibt dann $\mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{w}$, um anzudeuten, daß es sich nicht um ein beliebiges Gitter handelt, sondern um ein „singuläres", was eben bedeutet, daß $\mathfrak{a} \subset \Omega$.

Die eigentliche Theorie der komplexen Multiplikation beginnt nun mit der (nichttrivialen) Beobachtung, daß der Wert der j-Funktion $j(\mathfrak{a})$ für ein singuläres Gitter $\mathfrak{a}$ eine algebraische Zahl ist. Und zwar ist $j(\mathfrak{a})$ sogar *abelsch* über dem zugehörigen imaginär quadratischen Körper Ω. Das impliziert, daß die durch $\mathfrak{a}$ uniformisierte elliptische Kurve $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}$ bereits über einem abelschen Erweiterungskörper von Ω definiert ist. Bei geeigneter Normierung der Kurvengleichung stellt sich folgendes heraus: Die Koordinaten der Torsionspunkte von $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}$ erzeugen, zusammen mit den Gleichungskoeffizienten, einen Körper, der die maximale abelsche Erweiterung Ω^{ab} von Ω enthält. Das ist eine Folge der sogenannten „Teilungsformeln" der komplexen Multiplikation.

Diese Teilungsformeln können dazu benutzt werden, das Artinsche Reziprozitätsgesetz für $\Omega^{\mathrm{ab}}|\Omega$ explizit zu beschreiben, indem die Wirkung der Automorphismen auf die Koordinaten der Torsionspunkte von $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}$ studiert wird, welche durch geeignete analytische Funktionen parametrisiert werden. Insbesondere die Wirkung der arithmetisch definierten *Frobenius-Automorphismen* lassen sich auf diese Weise mit den komplexen Multiplikatoren aus M in Zusammenhang bringen.

Wird dieser Sachverhalt im Detail verfolgt, so ist zu erkennen, daß die klassische Theorie der komplexen Multiplikation in Charakteristik 0 ein Modell liefert für Problemstellungen der Art, wie sie sich im Zusammenhang mit der Riemannschen Vermutung in Charakteristik p ergeben haben. Für Hasse, der die Theorie der komplexen Multiplikation und den Fundus ihrer Methoden und Ergebnisse sehr genau kannte, war es also naheliegend, den Beweis der Riemannschen Vermutung bei Charakteristik p zurückzuführen auf die ihm bekannte Situation bei komplexer Multiplikation in Charakteristik 0.

[11] Heute hat es sich durchgesetzt, „Endomorphismenring" statt „Multiplikatorenring" zu sagen. In der Tat handelt sich genau um die Endomorphismen $z \mapsto \mu z$ von $\mathbb{C}/\mathfrak{w}$ als Liesche Gruppe.

Und zwar argumentierte er folgendermaßen: Es sei $F|K$ ein elliptischer Funktionenkörper über einem endlichen Körper K, mit zugehöriger elliptischer Kurve $\mathcal{E}$. Dann gibt es (evtl. nach endlicher Konstantenerweiterung) ein singuläres Gitter $\mathfrak{a}$ in einem imaginär quadratischen Körper Ω, mit folgenden Eigenschaften: Die gegebene elliptische Kurve $\mathcal{E}$ in Charakteristik p geht aus der Kurve $\mathcal{E}_\mathfrak{a}$ durch Konstantenreduktion nach einem geeigneten Primteiler $\mathfrak{P}$ von p in Ω^{ab} hervor. Außerdem kann die Konstruktion so eingerichtet werden, daß die Zahl q – die Anzahl der Elemente von K – im Multiplikatorenring M von $\mathfrak{a}$ in ein Produkt von zwei konjugierten Faktoren zerfällt:

$$q = \pi\overline{\pi}$$

derart, daß π (nach geeigneter Normierung durch ein Vorzeichen) auf den Torsionspunkten von $\mathcal{E}_\mathfrak{a}$ wie der zu q gehörige Frobenius-Automorphismus wirkt. Und dann ist

$$\mathcal{N}(\pi - 1)$$

gleich der Anzahl der K-rationalen Punkte der reduzierten Kurve $\mathcal{E}$.

Dieser Beweis geht also im Prinzip ähnlich vor wie der im vorigen Abschnitt angegebene, spätere Beweis von Hasse, nur daß er den Umweg über Charakteristik 0 und die Kurve $\mathcal{E}_\mathfrak{a}$ mit komplexer Multiplikation macht – und zwar deshalb, weil damals nur in Charakteristik 0 eine Theorie der Endomorphismen elliptischer Kurven vorlag, nämlich im Rahmen der klassischen, analytisch begründeten Theorie der komplexen Multiplikation.

Dieser Umweg kostete einige Mühe, denn die Reduktionstheorie elliptischer Kurven war damals noch nicht vorhanden. Für *gute* Reduktion, die hier in Frage kommt, wurde die Reduktionstheorie erst später von Deuring in befriedigender Weise entwickelt, und zwar im Anschluß an und beeinflußt durch die Hasseschen Arbeiten. In seiner Situation mußte Hasse explizit mit den Koeffizienten der geeignet anzusetzenden definierenden Gleichungen der Kurve rechnen, und das erforderte eine Reihe von Ausnahmen, die allein rechnerisch bedingt waren und nicht in der Natur der Sache lagen. Zum Beispiel konnte Hasse seinen Beweis nur im Falle der Charakteristik $p \neq 2,3$ durchführen. Auch mußten diejenigen Fälle ausgeschlossen werden, in denen $\mathsf{M} = \mathbb{Z}[\sqrt[4]{1}]$ oder $\mathsf{M} = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{1}]$ ist, wo also M außer ± 1 noch mehr Einheiten besitzt.

Es erscheint wahrscheinlich, daß Hasse bei den Arbeiten zur Beseitigung dieser Ausnahmefälle gemerkt hat, man müsse statt der analytischen Schlußweisen mehr algebraisch-arithmetisch argumentieren. Und bei der Ausarbeitung einer solchen Argumentation hat er dann gesehen, daß alles auch direkt für Charakteristik p Gültigkeit hat, ohne den Umweg über Charakteristik 0 nehmen zu müssen. Auch bei diesem Projekt vertraute Hasse auf die „Kraft der algebraischen Methode". Und sein Vertrauen erwies sich als voll gerechtfertigt. Wie bereits erwähnt, hatte er schon 1934 sein neues Konzept fertig, das er in seinen Hamburger Vorträgen vorstellte. [12]

In jedem Falle ist aber festzustellen, daß die genaue Kenntnis der klassischen Theorie der komplexen Multiplikation, sowie der ihr innewohnenden arithmetischen Strukturaussagen, für Hasse das entscheidende Moment darstellte, seinen Beweisansatz zu finden und erfolgreich durchzuziehen.

Bereits sehr früh hatte sich Hasse mit komplexer Multiplikation beschäftigt. Wie er selbst berichtet, hat er schon in den ersten Studiensemestern, während seiner kurzen Göttinger Studienzeit, eine Vorlesung von Hecke über komplexe Multiplikation gehört. Und auch in späteren Briefen zwischen Hasse und Hecke ist immer wieder von komplexer Multiplikation die Rede. Die komplexe Multiplikation hatte einen erheblichen Stellenwert unter denjenigen Gebieten, die Hasse für wesentlich in der Zahlentheorie und in der Mathematik überhaupt gehalten hat. Vielleicht hängt es hiermit zusammen, daß Hecke von Hasse als sein *zweiter akademischer Lehrer* angesehen wurde. (Der erste war Kurt Hensel.)

Das besondere Interesse Hasses an der komplexen Multiplikation lag wahrscheinlich auch darin begründet, daß diese in der historischen Entwicklung eine enge Verflechtung mit der Klassenkörpertheorie aufwies. Hasse hatte sich seit seinem Vortrag bei der DMV-Tagung in Danzig 1925 sehr intensiv für die Verbreitung und Weiterentwicklung der Klassenkörpertheorie eingesetzt, und er hat ja auch selbst wesentliche Beiträge dazu geliefert. Sein dreiteiliger DMV-Bericht, der stets als „Klassenkörperbericht" zitiert wurde, bildete lange Zeit das Standardwerk für jeden, der sich mit der höheren algebraischen Zahlentheorie beschäftigte, vergleichbar etwa mit dem Hilbertschen Zahlbericht, an den Hasse explizit anschließt. Und in Teil I dieses Berichts wird ausdrücklich die komplexe Multiplikation in den Rahmen der Klassenkörpertheorie gestellt.

In diesem Zusammenhang sind auch seine beiden wichtigen Arbeiten „Neubegründung der komplexen Multiplikation" aus den Jahren 1927-1931 zu sehen; diese Arbeiten besitzen auch heute noch fundamentalen Charakter und haben Anlaß gegeben zu einer fruchtbaren Weiterentwicklung.

Wir sehen also, daß Hasse aufgrund seiner mehr als 10-jährigen intensiven Arbeit an komplexer Multiplikation und Klassenkörpertheorie die besten Voraussetzungen besaß, um über die komplexe Multiplikation den Weg zu der Riemannschen Vermutung in Charakteristik p zu finden.

Trotzdem bleibt die Frage, *wie* denn der entscheidende Durchbruch gelang, *bei welcher Gelegenheit* Hasse das Konzept des Beweises klar geworden

[12] Im Jahre 1967 ist Hasse noch einmal auf seinen ersten Beweis zurückgekommen und hat einen Beweis seines Reduktionssatzes gegeben, der ja in der „Vorläufigen Mitteilung" ohne Beweis zitiert war. In einer anschließenden Arbeit im Crelleschen Journal hat dann Shiratani diesen Satz noch von überflüssigen Voraussetzungen befreien können.

war.

Es liegt nahe, in diesem Zusammenhang an die Arbeit von Herglotz zu denken, in welcher jener eine Eintragung aus dem Gaußschen Tagebuch bewiesen hatte.

Gauß hatte sich in seiner letzten Tagebucheintragung (1814) mit der Lösung einer diophantischen Kongruenz beschäftigt:

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 \equiv 1 \mod p \tag{22}$$

wobei $p \equiv 1 \mod 4$ eine Primzahl in $\mathbb{Z}$ ist. Und zwar fand er folgendes: Man zerlege p im Gaußschen Zahlring $\mathbb{Z}[i]$ in ein Produkt zweier konjugiert komplexer Primzahlen

$$p = \pi\overline{\pi}$$

mit der Normierung, daß $\pi \equiv 1 \mod 2(i-1)$ (was durch Multiplikation mit einer der vier Einheiten $\pm 1, \pm i$ zu erreichen ist). Dann wird die Lösungsanzahl N der Kongruenz (22) gegeben durch

$$N = \mathcal{N}(\pi - 1) = p + 1 - \pi - \overline{\pi}$$

also $N = p + \mathcal{O}(p^{1/2})$. Dabei sind bei der Zählung der Lösungen von (22) die vier Lösungen im Unendlichen mitzuzählen; sie ergeben sich, wenn man die affine Kurve $x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1$ projektiv erweitert. (Das ist genau der Hassesche birational invariante Standpunkt.) Bei der Kurve handelt es sich um eine Lemniskate, also eine elliptische Kurve (Geschlecht $g = 1$).

Die Beobachtung von Gauß wurde schließlich von Herglotz im Jahre 1921 bewiesen, *und zwar unter Zuhilfenahme der komplexen Multiplikation*. Der Multiplikatorenring der Lemniskate ist gerade der Gaußsche Zahlring, also $\mathbf{M} = \mathbb{Z}[i]$. Der Beweis von Herglotz ergibt sich aus der Diskussion der Teilungsgleichungen für den Multiplikator $\pi - 1$.

Dieser Beweis ist in der Tat bemerkenswert, denn er bedeutet im Spezialfall der Lemniskate genau dieselbe Vorgehensweise wie bei Hasse in seiner „vorläufigen Mitteilung" für beliebige elliptische Kurven – abgesehen von den analytischen Normierungen, die bei Hasse anders sind als bei Herglotz.

Es liegt daher nahe, zu vermuten, daß Hasse die Herglotzsche Arbeit gekannt und dann versucht hat, die dortigen, auf den speziellen Fall der Lemniskate bezogenen Überlegungen zu verallgemeinern. Die Vermutung wird gestärkt durch die Tatsache, daß Herglotz der „Doktorvater" von Artin gewesen war. Da Hasse engen Kontakt mit Artin pflegte, so hatte er möglicherweise von der Herglotzschen Arbeit gehört.

Diese Vermutung wird jedoch, soweit ich sehe, nicht gestützt durch Hasses eigene Angaben. In seinen Arbeiten hat er Herglotz niemals zitiert. Stattdessen finden wir in einer späteren Arbeit von Deuring ein Zitat der Herglotzschen Arbeit, zusammen mit der Bemerkung, daß die Gaußsche Tagebucheintragung „offenbar in Vergessenheit geraten ist". Da Deuring aus dem Hasseschen Arbeitskreis der dreißiger Jahre kam, so muß man wohl annehmen, daß die Arbeit von Herglotz im Hasseschen Kreis in der Tat nicht bekannt war.

Wenn wir also nach dem unmittelbaren Anlaß suchen, bei dem Hasse die entscheidende Beweisidee erhielt, so müssen wir – mangels eindeutiger Hinweise – die Arbeit von Herglotz aussparen.

Tatsächlich gibt es einen Brief von Hasse an Mordell, aus dem wir mehr über jenen unmittelbaren Anlaß erfahren. Der Brief ist datiert vom 6.3.1933. In ihm teilt Hasse mit, daß es ihm *kürzlich* gelungen sei, die Riemannsche Vermutung im elliptischen Falle für die Zetafunktion zu beweisen. Dabei sagt Hasse wörtlich:

> *...It is a curious fact that the leading idea of my proof may be considered as the fruit from our reading Siegel's great paper last year, or rather of my learning of your method in the elliptic case. For, as there the equation* $y^2 = f_4(x)$ *is treated by uniformizing it through elliptic functions, so I now treat the congruence* $y^2 \equiv f_4(x) \mod p$ *by uniformizing it in the same way...*

Demnach war es Mordell, der Hasse den entscheidenden Impuls für seinen Beweis gegeben hat. Und zwar aus Anlaß der gemeinsamen Lektüre von „Siegels großer Arbeit". Ein explizites Zitat, um welche Arbeit Siegels es sich gehandelt hatte, findet sich in der erwähnten „Vorläufigen Mitteilung": Es war die in der Tat große Arbeit „*Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*", die im Jahre 1929 in den Abhandlungen der Berliner Akademie erschienen war. Darin zeigt Siegel u.a., daß eine über einem algebraischen Zahlkörper definierte affine irreduzible algebraische Kurve nur endlich viele Punkte mit ganzalgebraischen Koordinaten besitzen kann – vorausgesetzt, daß das Geschlecht $g > 0$. Wenn $g > 1$, so ist dieser Satz heute durch den Faltingschen Beweis der Mordellschen Vermutung überholt. Aber im elliptischen Falle, wenn $g = 1$, ist der Siegelsche Satz noch von unveränderter Bedeutung.

Nach dem Brief von Hasse zu schließen, haben wir uns vorzustellen, daß er gemeinsam mit Mordell die Siegelsche Arbeit studierte, anläßlich des Besuches von Mordell in Marburg 1932. Mordell hat ihm dabei seine Version des Siegelschen Beweises im elliptischen Falle erklärt, und es war dann gerade diese Diskussion, die Hasse zu dem Ansatz über die Uniformisierung durch elliptische Funktionen führte – also zur komplexen Multiplikation.

Vielleicht ist es nicht uninteressant, aus der Antwort Mordells auf die Mitteilung von Hasse zu zitieren. Dieser Brief datiert vom 9.3.33, also drei Tage nachdem Hasse seinen Brief an Mordell geschrieben hatte:

> *...I was very glad to hear that you had completely knocked down the bottom out of* $y^2 \equiv f_4(x) \mod p$. *...The first case of any exact results of zeta functions on* $\Re(s) = 1/2$ *will sure attract an enormous amount of attention ... What a tremendous vindication that the proof should depend on such a comparatively high brow theory.*

Angesichts der Tatsache, daß Mordell bekanntermaßen kein großer Freund von „high brow theory" gewesen ist und auch sonst mit positiven Meinungsäußerungen gegenüber Kollegen zurückhaltend war, scheint mir dieses Zitat bemerkenswert zu sein.

Die von Hasse angeführte Analogie seiner Methode zur Siegelschen Methode erscheint uns heute etwas künstlich, und er selbst ist später niemals darauf zurückgekommen.

Immerhin zeigt sich an dem Hasseschen Zitat, daß er an der Siegelschen Arbeit von Beginn an stark interessiert war. Hasse hat immer wieder versucht, die Siegelschen Resulate der von ihm, Hasse, begründeten algebraischen Theorie der Funktionenkörper einzuordnen, jetzt nicht über einem endlichen Körper, sondern über einem algebraischen Zahlkörper als Grundkörper. Hasse spricht dann von einem „arithmetischen Funktionenkörper".

Für das Geschlecht 1, also wiederum im elliptischen Falle, hat Hasse dieses sein Programm noch selbst durchgeführt; die Arbeit erschien in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1951. Ich selbst habe dann später (1973) in einer gemeinsamen Arbeit mit Abraham Robinson das Thema noch einmal aufgegriffen und zeigen können, daß und wie das Hassesche Programm auch für beliebiges Geschlecht durchgeführt werden kann. Es erscheint mir wahrscheinlich, daß sich in ähnlicher Weise auch die Mordellsche Vermutung in die Hassesche Theorie der arithmetischen Funktionenkörper einordnen lassen wird.

Zusammenfassung:

- *Schon im April 1933 legte Hasse eine Beweisskizze für elliptische Funktionenkörper vor. Dieser Beweis macht einen Umweg von Primzahlcharakteristik über Charakteristik* 0*, unter Benutzung der damals wohlbekannten, klassischen Theorie der komplexen Multiplikation. Dazu zeigte Hasse, daß die gegebene elliptische Kurve in Charakteristik* p *sich als gute Reduktion einer geeigneten singulären elliptischen Kurve aus Charakteristik* 0 *darstellen läßt, und zwar derart, daß daraus die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung in Charakteristik* p *abgelesen werden kann.*

- *Dieser Beweis wurde später überholt durch die Erkenntnis, daß sich die einschlägigen Resultate über Endomorphismenringe auch für beliebige Charakteristik direkt herleiten lassen. Aber die komplexe Multiplikation im Verein mit der Klassenkörpertheorie hatte Hasse den Weg zum Beweis gewiesen. Durch frühere Arbeiten war Hasse eng vertraut mit jenen beiden Gebieten.*

- *Unmittelbarer Anlaß für die Konzeption seines Beweises war eine Diskussion von Hasse mit Mordell über die große Arbeit von Siegel 1929 über diophantische Approximationen.*

- *Es ist nicht nachweisbar und eher unwahrscheinlich, daß Hasse die einschlägige Arbeit von Herglotz 1921 gekannt hat, in welcher der Hassesche Beweisansatz im Falle der Lemniskate vorweggenommen worden war.*

9 Nachwort

Der Berichtszeitraum umfaßt etwa die Jahre 1930–1940. In politischer Hinsicht war es die Zeit großer Umwälzungen, die Zeit katastrophaler Geschehnisse bis hin zum zweiten Weltkrieg. Auch Hasse wurde in den Strudel dieser Ereignisse hineingezogen, seine Übersiedlung nach Göttingen im Jahre 1934 hing direkt damit zusammen. Über diese extrem schwierigen Jahre berichtet Schappacher in seinem Artikel „Das Mathematische Institut der Universität Göttingen 1929–1950", sowie auch Günther Frei in seiner Hasse-Biographie.

Es ist hier nicht der Ort, darauf näher einzugehen. Immerhin erscheint es bemerkenswert, daß Helmut Hasse ungeachtet all dieser Schwierigkeiten und Widrigkeiten sein mathematisches Werk weiterführte. Durch die nationalsozialistische Politik wurde die große Tradition Göttingens als Zentrum der mathematischen Forschung abrupt abgebrochen. In der kurzen Zeit, in der Hasse in Göttingen wirkte, hat er die Mathematik in Göttingen wieder beleben können und die mathematische Forschung dort zu einem gewissen Höhepunkt geführt. Göttingen in den dreißiger Jahren kann wohl mit Recht als eine Keimzelle der heute so genannten arithmetischen Geometrie angesehen werden.

Prof. Dr. Peter Roquette
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 288 · 69120 Heidelberg